EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

NR.3

JAARGANG 92 - DECEMBER 2016

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 92 NR 3



IN DIT NUMMER

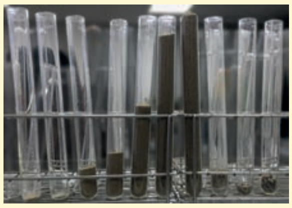



Foto: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

Kort vooraf

Als hoofdredacteur moet je wel een zeer goede reden hebben om niet op de jaarvergadering van de NVvW te verschijnen. Het thema van de dag was 'Grenze(n)loze Wiskunde', en ik was de daad bij het woord aan het voegen. In het kader van een Europees project, EELLSS (www.eellss.eu), verzorgde ik in Barcelona een training aan 25 docenten uit zeven verschillende landen over het opzetten van vakoverstijgende projecten die iets met 'soil' te maken hebben. De wiskunde ligt letterlijk voor het oprapen, zie het 'reageerbuizenhistogram' van een bodemmonster dat door een zevenset is geschud. Maar er was slechts



één wiskundedocent in het bonte gezelschap, Ruud Hazen van De Nieuwste School in Tilburg. En valt het u ook op hoeveel NLT-modules bol staan van de gemiste kansen om daar wiskunde in te integreren? Het lijkt wel alsof wij ons onttrekken aan vakoverstijgende zaken. En zou het misschien daarom zijn dat we onze didactische aanpak niet altijd terugzien in de methodes van andere vakken? Zie het artikel van Melanie Steentjes en Ans van der Ark in dit nummer: wat de leerlingen bij wiskunde leren over procenten lijkt niet op de aanpak bij economie. Misschien moeten we ons toch wat meer laten zien bij die vakoverstijgende activiteiten...
Wat we gelukkig wel hebben is de geschiedenis van de wiskunde. Met enig bazuingeschal wil ik een nieuwe rubriek inluiden: 'Wortels van de wiskunde', door Jeanine Daems en Desiree van den Bogaart. Over het gebruik van primaire bronnen in de wiskundeles. In het volgende nummer komt dan een mooi praktijkvoorbeeld over vakoverstijging in het vmbo. Want ook redigeren is vooruitzien...

Tom Goris

WAAROM GESCHIEDENIS IN DE WISKUNDELES?

Jeanine Daems

Onlangs verscheen de vertaling van het boek *Math through the ages* van William Berlinghoff en Fernando Gouvêa. De vertaling is van de hand van Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems. In het boek ontbreekt de praktische toepassing van de geschiedenis in het wiskundeonderwijs. Dat leidde tot de geboorte van een nieuwe rubriek: 'Wortels van de wiskunde'.



Motiverend

Er zijn goede redenen om iets met de geschiedenis van de wiskunde te doen in de wiskundeles. De meeste mensen denken in eerste instantie vooral aan af en toe een anekdote vertellen voor de motivatie en de afwisseling. Als je rekenkundige reeksen gaat uitleggen, is het bijvoorbeeld leuk om het verhaal over Gauss en zijn strafwerk te vertellen.[1] De anekdote kan de wiskunde een wat menselijker gezicht geven, en het is leuk dat de leerling in dit verhaal slimmer is dan de docent.

Een nadeel van dergelijke anekdotes is dat het waarheidsgehalte soms ondergeschikt is aan de motiverende rol. Zo heeft het verhaal over Gauss een redelijk betrouwbare oorsprong, maar bewijs voor Archimedes die al 'Eureka!' roepend naakt door de straten rende is er bijvoorbeeld maar weinig. Een ander nadeel is dat wiskundigen in zo'n anekdote toch regelmatig overkomen als wereldvreemde, hyperintelligente, bijzondere genieën. Dat is niet per se de boodschap die we onze leerlingen willen meegeven, en er zijn in de geschiedenis ook genoeg voorbeelden te vinden van mensen die geworsteld hebben met de materie en wiskundigen die door domweg doorzetten resultaten hebben bereikt. Er is natuurlijk niets mis met het af en toe inzetten van een verhaal, maar er zijn meer inspirerende manieren om de geschiedenis te gebruiken. En dat gaat dan echt over de inhoud, over *hoe* en ook *waarom* de wiskunde vroeger werd gedaan.

Verschillende auteurs schrijven over de redenen om geschiedenis van de wiskunde te gebruiken in de wiskundeles, bijvoorbeeld Berlinghoff en Gouvêa in hun inleiding, Tzanakis en Arcavi, Jahnke et al en Jankvist.[2] Ik bespreek er hieronder een paar, zonder te pretenderen dat dit een compleet overzicht is.

Bouwwerk

Berlinghoff en Gouvêa noemen het gebruiken van de geschiedenis voor een breder blikveld: wiskunde is niet ontstaan als losse stukjes informatie, wiskunde is ontwikkeld met een reden, vaak een praktische, maar niet altijd.[3] Het heeft bijvoorbeeld meerwaarde om uit te leggen waarom de complexe getallen zijn bedacht, want voor leerlingen kan dat erg vreemd lijken. En soms is wiskunde ook ontwikkeld om de wiskunde zelf, en ook dat is leuk om te ontdekken. Wiskundige resultaten zijn geen los zand, wiskundigen bouwen voort op werk van eerdere wiskundigen.

Mensenwerk

Ook kan geschiedenis een context geven: wiskunde is een cultureel product dat door mensen gemaakt is op een bepaalde plek en in een bepaalde tijd. Vaak is de wiskunde dan ook beïnvloed door die context. Bovendien kun je laten zien hoe in andere culturen ook hoogstaande wiskunde ontwikkeld is, bijvoorbeeld in de Arabische wereld in de vroege Middeleeuwen, toen er in Europa weinig ontwikkeling was op wiskundig gebied.

Ik vind dit zelf een zeer belangrijke reden. Voor leerlingen kan wiskunde overkomen als een afgerond, gegeven geheel dat nou eenmaal zo is zoals het in het boek staat. Als je de regeltjes uit het boek kunt toepassen, kun je de opgaven die je krijgt oplossen. Dat is hoe veel mensen wiskunde ervaren hebben, zelfs bij mijn studenten zie ik dat beeld regelmatig terug. Door oude bronnen, oude methodes, andere getalsystemen, wiskunde uit allerlei tijden en zeker ook culturen te laten zien, geef je een beeld van wiskunde als een levend vak, door mensen gemaakt, waar je dus ook zelf nog over na kunt denken.

> 'DOOR WISKUNDE UIT ALLERLEI TIJDEN EN CULTUREN TE LATEN ZIEN, GEEF JE EEN BEELD VAN WISKUNDE ALS EEN LEVEND VAK, WAAR JE DUS OOK ZELF NOG OVER NA KUNT DENKEN.'

Meer begrip voor leerlingen

Daarnaast kan kennis van de geschiedenis bij de docent wellicht bewustwording opleveren: als je weet hoe moeizaam de acceptatie van de negatieve getallen verliep, kun je nog meer begrip opbrengen voor leerlingen die met dergelijke nieuwe, toch redelijk abstracte concepten

worstelen en inschatten waar dergelijke moeilijkheden zich kunnen voordoen.

Praktische voorbeelden

Onlangs verscheen *Wortels van de wiskunde,* de vertaling die ik met Desiree van den Bogaart maakte van het boek *Math through the ages* van Berlinghoff en Gouvêa. Dit boek geeft een beknopt overzicht van de wiskunde door de tijd heen, en daarnaast bevat het 25 zogeheten 'schetsen': korte, thematische hoofdstukjes. Die opzet is fijn, want je kunt zo per onderwerp een overzichtelijk, kort stukje informatie opzoeken. Bij die onderwerpen kun je denken aan π, kwadratische vergelijkingen, algebraïsche notatie, niet-euclidische meetkunde, noem maar op.



figuur 1 Wortels van de wiskunde

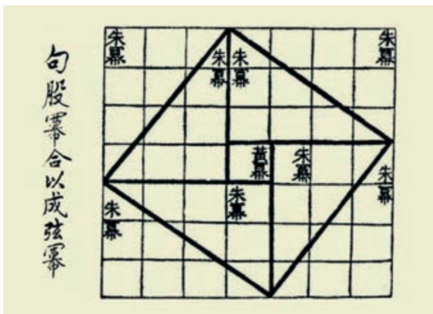
Wat ontbreekt in het boek zijn praktische voorbeelden om als docent mee aan de slag te gaan. Ook laat het boek maar weinig echte oude bronnen zien. Wij denken dat het gebruik van oude bronnen veel kan toevoegen in de wiskundeles. In de komende artikelenreeks gaan we een aantal voorbeelden verder uitdiepen. Per artikel kiezen we één onderwerp uit de schoolwiskunde, met een bijbehorende schets, en daar zoeken we geschikte bronnen bij. Ook gaan we in op hoe je bij zo'n bron goede vragen en opdrachten kunt maken.

Waarom primaire bronnen?

Het toepassen van primaire bronnen is geen doel op zichzelf. Of dat passend is hangt af van de doelen die je hebt als docent. Jahnke et al. noemen drie doelen waarbij juist het inzetten van primaire bronnen goed past: *replacement* (vervangen), *reorientation* (heroriënteren) en *cultural understanding* (begrip van cultuur).[4]
Met vervangen bedoelen ze: geschiedenis integreren in de wiskunde vervangt het gebruikelijke door iets anders, het stelt je in staat de wiskunde te zien als een intellectuele activiteit in plaats van als een geheel van kennis en methodes. Bronnen kunnen voorbeelden laten zien van worstelingen met nieuwe denkbeelden, zoals de twijfels die wiskundigen in de zestiende en zeventiende eeuw hadden over wat irrationale getallen nou eigenlijk zijn.[5]
De eigen onzekerheden bij leerlingen of docent (bijvoorbeeld over die ongemakkelijke 'oneindige' decimale ontwikkeling) kunnen bespreekbaar gemaakt worden en de wiskunde krijgt een menselijker gezicht.
Heroriënteren betekent hier dat het bekende onbekend gemaakt wordt: een historische tekst proberen te vatten kan ervoor zorgen dat je je eigen denkbeelden moet herzien of aanpassen. De geschiedenis laat zien dat wiskundige concepten uitgevonden zijn en niet zomaar uit zichzelf zijn ontstaan. Het lezen van oude bronnen kan ook laten zien dat een wiskundig concept, in tegenstelling tot wat veel mensen denken, soms echt veranderd is in de loop van de tijd. Een mooi voorbeeld is de ontwikkeling van het functiebegrip dat eerst nog over algebraïsche relaties ging, maar uiteindelijk puur verzamelingtheoretisch werd geformuleerd. Ook kun je laten zien dat notatie en methodes veranderlijk zijn.
Met begrip van cultuur wordt bedoeld dat de geschiedenis de ontwikkeling van de wiskunde een plaats geeft in de wetenschappelijke en technologische context van een bepaalde tijd en in de bredere culturele geschiedenis van ideeën. Vroeger waren wiskundigen vaak ook filosoof en de strikte scheiding tussen wis- en natuurkunde is van relatief late datum. Dit kan aanleiding geven tot mooie vakoverstijgende inzichten en opdrachten.

Geschikte bronnen

Maar hoe kom je aan geschikte bronnen? Er zijn mooie bronnenboeken te vinden (verwijzingen daarnaar komen in de artikelen in deze serie) en er staan steeds meer historische boeken integraal op internet. Maar lang niet alle oude bronnen zijn geschikt: de inhoud moet natuurlijk enigszins aansluiten bij de middelbare-schoolstof, en liefst ook leesbaar zijn (dat wil zeggen: in het Nederlands of eventueel Engels geschreven, of vertaald). Maar er zijn ook veel bronnen te vinden waarbij alleen aan de plaatjes al een heleboel moois is te ontdekken, zeker als je als docent meer over de achtergrond weet.



figuur 2 Visueel bewijs van wat wij de stelling van Pythagoras noemen. Uit: *De negen hoofdstukken*, een Chinees boek over wiskunde, vóór 200 v.Chr.

Een voorbeeld is figuur 2: een reconstructie van een figuur uit *De negen hoofdstukken*, een verzameling van wiskundige kennis uit China, samengesteld vóór 200 v. Chr. Dit plaatje gaat over wat wij de stelling van Pythagoras noemen en het geeft een visueel bewijs in het geval van de 3-4-5-driehoek dat werkt via het aangeven van overeenkomstige puzzelstukjes. Als moderne lezer heb ik meteen de neiging om de zijden a, b en c te noemen en met algebra aan de slag te gaan, en op die manier kun je ook snel een algemeen bewijs vinden. Alleen: dat is natuurlijk anachronistisch. Ik vind zo namelijk echt een ander bewijs dan dat van de Chinezen. Je moet als docent bij zo'n bron dus kiezen tussen het gebruiken van oude plaatjes of problemen als inspiratie voor een in feite modern sommetje, of juist wel ingaan op de oude methode en die vergelijken met de moderne methode en daardoor inzichten opdoen over dat het anders kan dan je gewend bent. Daarmee zien leerlingen in dat ook een exact vak als wiskunde stijlverschillen kent op verschillende plekken en in andere tijden.
Het is onvermijdelijk dat wij onze eigen didactische voorkeuren laten meespelen in de keuzes die wij maken, maar we moedigen je aan het materiaal naar eigen inzicht aan te passen. We hopen dat onze artikelen je kunnen motiveren de stap te zetten naar die interessante geschiedenis en mooie wiskundige ideeën uit oude bronnen echt te gebruiken in je onderwijs. We hopen dat je daarmee net zulke mooie ervaringen zult opdoen als wij. De eerste aflevering, waarin Desiree ingaat op het begin van de kansrekening, is te vinden op blz. 7 van deze *Euclides*.

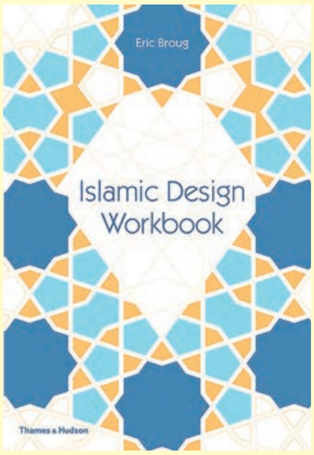
Noten

[1] Berlinghoff, W. & Gouvêa, F. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven, p. 2.
[2] Berlinghoff, W. & Gouvêa, F. (2016).
Jahnke, H. N. (et al.), The use of original sources in the mathematics classroom. In Fauvel, J. & Maanen, J. van (eds.) (2000). *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 291-328). Dordrecht: Kluwer.
Tzanakis, C. & Arcavi, A. Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. Fauvel, J. & Van Maanen (2000) (pp. 201-240).
Jankvist, U.F. (2009). A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics(71)*3, pp 235–261.
[3] Berlinghoff, W. & Gouvêa, F. (2016).
[4] Jahnke, H. et. al (2000), p. 292.
[5] Ibidem, p. 296.

Over de auteur

Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding, aan de universiteit en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: *jeanine.daems@hu.nl*

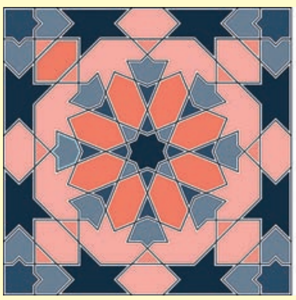
VERSCHENEN

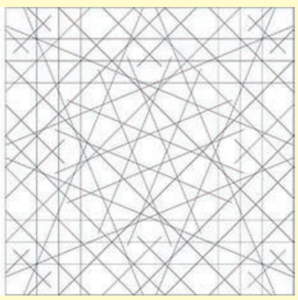


Titel: Islamic Design Workbook
Auteur: Eric Broug
Uitgever: Thames & Hudson, New York
Paperback
ISBN: 978-05-0029-242-6
Prijs: $ 24,95
128 pagina's

Zelden brengen we een Engelstalig boek in deze rubriek onder de aandacht, maar dit is een mooie uitzondering. Niet alleen omdat de auteur Eric Broug, u kent hem wellicht nog van de vorige NWD, een Nederlander is, maar vooral omdat het boek 'instrumenteel' is. Het is eigenlijk een kleurboek... Maar voordat je aan de slag kunt met de kleurpotloden moet je eerst uit een ingewikkeld constructielijnenspel het te kleuren patroon reconstrueren. Op die manier krijg je een idee van de complexiteit van de patronen en hoe ze ontworpen zijn. Ideaal voor rustige momenten in de kerstvakantie of als idee voor de laatste lessen voor de vakantie. In een latere *Euclides* komt Eric Broug zelf aan het woord.
Een voorproefje van zo'n patroon en werkblad vindt u op de website. Het is een bewerking van een mozaïek uit 1271 dat te vinden is in de Madrasa al-Safarin, in Fes, Marokko.

vakbladeuclides.nl/923broug





WORTELS VAN DE WISKUNDE

Desiree van den Bogaart

I: HET BEGIN VAN KANSREKENING

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: het begin van kansrekening.



Het zal niemand verbazen dat de kansrekening haar oorsprong vindt in spelletjes en gokken. Er is een klassieke anekdote over het verdelen van de pot bij een onafgemaakt spelletje, die in verschillende gedaantes aan verscheidene wiskundigen wordt toegeschreven.
Er wordt gezegd dat de Italiaanse monnik Luca Pacioli (1445 - 1517) zich al met dit probleem bezighield, en ook de naam van de Italiaanse aartsgokker Girolamo Cardano (1501 - 1576) (beter bekend vanwege zijn werk aan de oplossing van derde- en vierdegraads vergelijkingen) valt regelmatig. Zijn *Handboek over kansspelen* (*Liber de ludo alae*) werd echter pas in 1663 gepubliceerd, negen jaar nadat de Fransman Blaise Pascal (1623 - 1662) het volgende probleem had opgelost:

> In 1654 legde ridder De Méré, een rijke Franse edelman die wel van gokken hield, een probleem dat voortkwam uit een spelletje voor aan de wiskundige Blaise Pascal. De vraag was hoe de pot van een onafgemaakt spel moest worden verdeeld. De 'pot' bestond uit het geld dat door elke speler aan het begin van het spel was ingezet. Normaal gesproken behoorde de totale hoeveelheid geld na het bepalen van de inzetten aan niemand meer toe, tot het spel voorbij was, waarna de winnaar alles kreeg. De vraag van De Méré, ook wel bekend als het 'puntenprobleem' was hoe de inzet van een onafgemaakt spel moest worden verdeeld, als de tussenstand van de spelers bekend is. (Berlinghoff, blz. 161)

Bovenstaande is voor leerlingen misschien nog wat abstract geformuleerd, maar het kan makkelijk concreet gemaakt worden. Stel je voor dat je aan het tafelvoetballen bent. Jij en je broertje hebben allebei vijftig cent ingelegd in de pot. Wie het eerste drie goals heeft gemaakt, wint de pot. Bij een tussenstand van 2-1 in jouw voordeel, worden jullie geroepen voor het eten. Wat doe je dan met de euro die in de pot zit?

Er kan een leuke discussie op gang komen in de klas, na het stellen van een dergelijke vraag. Om te beginnen kan er voorgesteld worden om iedere speler de inzet terug te geven. Dat is een eerlijke oplossing, aangezien er geen winnaar is bepaald. Maar er is al wel een stand van 2-1 neergezet, dus jij zou ook kunnen beargumenteren dat jij de winnaar bent, die de pot verdient. Maar daar gaat je broertje waarschijnlijk niet mee akkoord. Hij zou kunnen voorstellen dat, aangezien jij twee van de drie gescoorde goals hebt gemaakt, jij recht hebt op twee derde deel van de pot en hij toch zeker een derde kan claimen. Afhankelijk van de machtsverhoudingen tussen jou en je broertje ga je hier mogelijk mee akkoord. Pascal zou zeggen dat je jezelf daarmee tekort doet. Maar dat gaan we zo ontdekken aan de hand van een primaire bron.
Er zijn nu in ieder geval alvast twee opmerkingen te maken over het gebruik van geschiedenis van de wiskunde in de les. Ten eerste is het hier onmiskenbaar voor leerlingen hoe wiskunde verbonden is met vraagstukken uit het dagelijks leven. Het is dus geen abstract vak dat bedacht is door een stelletje wereldvreemde lui. Ten tweede is er ruimte voor discussie en interpretatie. Het is dus niet altijd een soort absolute waarheid waar je het maar mee eens hebt te zijn. Je kunt soms keuzes maken, mits je die beargumenteert.

Huygens verdeelt de pot

In 1657 schreef de grote Nederlandse wetenschapper Christiaan Huygens (1629 - 1695) zijn *Van rekeningh in spelen van geluck*, een boek waarin kansrekening als theorie wordt opgebouwd aan de hand van steeds complexere spelsituaties (bijvoorbeeld meer spelers). Hierin zijn de ideeën van Pascal en tijdgenoten terug te vinden. We krijgen niet vaak de kans in de wiskundeles om een primaire bron te gebruiken in de oorspronkelijke taal, dus laten we eens kijken naar wat Huygens hier over schreef (zie volgende pagina, figuur 1).

IV Voorstel

Genomen dan dat ick tegens een ander speele ten dryen uyt, en dat ick alreede 2 spelen hebben en hy maer een. Ick wil weeten, ingevalle wy het spel niet en wilden voortspeelen, maer het geen ingeset is gerechtelijck wilden deelen, hoeveel my daer van komen soude.
Om nu tot de eerst voorgestelde questien te komen, aengaande de verdeelingh onder verscheyde speelders te maecken, als haere kanssen ongelijck zijn, soo is 't noodigh van de lichtste te beginnen. Voor eerst moet acht genomen werden alleen op de spelen, die wederzijds noch ontbreecken. Want het is seecker, dat, of wy ten 20gen uyt speelden, en dat ik 19 hadde, en die tegens my speelt 18, dat ick even het selfde voordeel soude hebben als nu, hebbende van drie spelen 2 gewonnen en hy een: door dien in beyde gevallen my noch maer een spel ontbreeckt en hem twee spelen. Voorts om te vinden, wat deel ons elk toekomt, soo moet aengemerkt werden watter soude gebeuren indien wy voort speelden. Het is seecker indien ick het eerste spel quam te winnen, dan soude ik uyt wesen en hebben al dat ingeset is, het welck zy genoemt a. Maer indien den anderen het eerste spel won, dan souden wy gelycke kans hebben, elck noch een spel ontbreecken, en daarom elck gerechtigt zijn tot ½ a. Het is nu seecker dat ick gelijkcke kans heb om dat eerste spel te winnen of te verliesen. Soo heb ik dan gelijcke kans om a te hebben of ½ a, het welck door het 1ste Voorstel soo veel is als of ick van beyde de helft hadde dat is ¾ a, en blijft voor die tegens my speelt ¼ a. Wiens rekening oock van eersten aen op de selve manier hadde konnen gemaeckt werden. Hier uyt blijckt, dat die mijn spel soude willen overnemen mij ¾ a daer voor kan geven; en dat men dienvolgens altijds kan 3 tegen 1 setten, als men neemt 1 spel te winnen, eer dat een ander 2 spelen wint.

figuur 1 Fragment uit Huygens' *Van rekeningh in spelen van geluck*

In het eerste deel van dit 'voorstel' wordt de probleemsituatie geschetst. Laat je niet afschrikken door het oud-Nederlands en neem je leerlingen hier ook in mee: dit is precies het voorbeeld van zo-even. We spelen *ten dryen uyt*, wat wil zeggen dat wie het eerst drie punten heeft, wint. Het spel wordt afgebroken op het moment dat de ik-figuur twee punten heeft en *hy* (de tegenstander) maar één.
Vervolgens merkt Huygens op dat het er eigenlijk niet toe doet hoeveel punten er al door de spelers zijn gehaald, maar dat het er om gaat hoeveel punten de spelers nog *ontbreecken* (nodig hebben) om te winnen. In die zin is de tussenstand van 2-1 bij een spel om wie het eerst drie punten heeft, precies dezelfde als een tussenstand van 19-18 bij een spel waarbij de winnaar als eerste twintig punten nodig heeft: in beide gevallen moet de ik-figuur immers nog één punt halen en *hy* nog twee. Hiermee maakt Huygens dus een keuze voor een bepaalde werkwijze, die volstrekt logisch is, maar nog steeds een keuze. Zeker bij het spel waarbij er twintig punten nodig zijn, zou een verdeling op basis van de al behaalde punten veel gunstiger zijn voor de tegenstander.
Daarna onderzoekt Huygens wat de mogelijke gebeurtenissen waren, als het spel wél was uitgespeeld. Daarbij benoemt hij nog even een variabele a voor de totale inzet. Het eerstvolgende spel zou met gelijke kans door beide spelers gewonnen kunnen worden. Dat geeft de ik-figuur al recht op de helft van de pot, aangezien hij dan drie punten zou hebben. Als de ander zou winnen, zou er weer met gelijke kans door een van beiden een punt worden behaald, dus de overgebleven helft van de pot wordt ook eerlijk verdeeld. Dat maakt dat Huygens ¾a claimt, en er voor *hy die tegens my speelt* slechts ¼a resteert. Je broertje kan dus slechts aanspraak maken op 25 cent. Merk op dat Huygens hier niet over de uiteindelijke winkans spreekt, maar een verdeling van de pot uitrekent. Die verdeling komt uiteraard exact overeen met de kans op de overwinning van beide spelers als we voor a even 100% nemen. Maar ook dit is een interessante nuance die een vraag zou kunnen opleveren richting leerlingen. En dit maakt tevens duidelijk dat dit probleem opgelost kan worden zonder enige voorkennis op het gebied van kansrekening, behalve de basale notie van eerlijk delen (*fifty-fifty*). Ook de slotzin van Huygens' vierde voorstel geeft nog stof tot nadenken voor leerlingen: waarom *kan men altijd 3 tegen 1 setten*? En de uitbreidingsmogelijkheden van dit voorbeeld liggen voor de hand: wat gebeurt er bij een tussenstand van 2-0? En wat als de krachtsverhoudingen niet *fifty-fifty* zijn? Tafelvoetbal is ook eigenlijk niet echt een gokspel met gelijke kansen. Enzovoorts.

Zat de grote Leibniz ernaast?

Een tweede voorbeeld van een primaire bron die goed bruikbaar is bij de introductie van het onderwerp kansen, is afkomstig uit een tekst van de Duitser Gottfried-Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Leibniz is vooral bekend als grondlegger van de differentiaal- en integraalrekening en de binaire getallen waarmee de computer mogelijk werd, maar hij heeft nog veel meer gedaan en heeft zich onder andere met kansrekening beziggehouden. Hier zullen we moeten werken met een vertaling, want Leibniz schreef de oorspronkelijke tekst in 1678 in het Frans.

(...) Laten we een voorbeeld bekijken. Twee mensen spelen met [twee] dobbelstenen: de een wint als hij 8 gooit, de ander als hij 5 gooit. De vraag is om er achter te komen op welke van de twee spelers je het best kunt inzetten. Ik zeg dat het degene moet zijn die 8 moet gooien en zelfs dat zijn voordeel vergeleken met de hoop die de ander moet hebben, drie staat tot twee is.
Dat wil zeggen dat ik drie écus zou kunnen inzetten tegen twee op degene die 8 moet gooien, zonder mezelf te benadelen. En als ik een tegen een zou inzetten, zou ik een groot voordeel hebben. Het is waar dat er altijd een kans is dat ik verlies, zeker aangezien de kans op verlies twee is tegen drie voor kans op winst. Maar na verloop van tijd, uitgaande van deze kansen, en door veel te spelen en in te zetten, is het een gegeven dat ik meer gewonnen zal hebben dan verloren.
Om te laten zien dat er een grotere kans is voor de speler die 8 moet gooien, volgt nu een uitleg. Ik veronderstel dat ze met twee dobbelstenen spelen en dat de dobbelstenen eerlijk zijn. Aangenomen dat dit zo is, is het duidelijk dat er slechts twee manieren zijn om 5 te gooien; de ene is 1 en 4, de andere 2 en 3. Echter er zijn drie manieren om 8 te gooien, namelijk 2 en 6 , 3 en 5, en 4 en 4. Elk van deze mogelijkheden heeft van zichzelf een even grote kans, want er is geen enkele reden waarom bijvoorbeeld 1 en 4 vaker zou voorkomen dan 3 en 5. Als gevolg daarvan, zijn er evenveel kansen (onderling gelijk aan elkaar) als mogelijke manieren. Dus als 5 ogen slechts op twee manieren gegooid kan worden, maar 8 ogen kan op drie manieren, dan is het duidelijk dat er twee kansen op 5 zijn en drie op 8. (...)

figuur 2 Fragment uit Leibniz' *Le jeu du Quinquenove*, zoals geciteerd in Mora-Charles (1992), vertaling D. van den Bogaart

Welke mogelijkheden biedt deze correspondentie ons?
De redenering van Leibniz is op zich behoorlijk goed te volgen. De brief geeft voorzetten richting de *wet van de grote aantallen*. Een ambitieus lesontwerp zou ook kunnen leiden tot begrippen als *relatieve frequentie*, *a priori* en *a posteriori* kansen. Maar als we om die laatste soort kansen te bepalen het experiment eens een flink aantal keer gaan uitvoeren (of bijvoorbeeld een simulatie laten maken door onze leerlingen op de computer of de GR), dan ontstaat er iets prachtigs: twijfel.
De berekening van Leibniz zou moeten leiden tot een 60 - 40%-verdeling van de kansen op 8 versus 5. Het experiment zal bij een flink aantal uitvoeringen echter stabiliseren rond een verdeling 55% om 45%. Dus ofwel de grote Leibniz zit ernaast, of de wet van de grote aantallen stelt ons teleur...? De percentages 55 - 45% lijken te passen bij een verhouding van 5 staat tot 4. Dat zou betekenen dat er vijf manieren zijn om 8 te gooien en vier om 5 te gooien. Voor sommige leerlingen is dat van begin af aan al duidelijk, voor andere zal het werken met twee verschillend gekleurde dobbelstenen uitkomst brengen.
Ook hier geeft een primaire historische bron dus prachtige didactische mogelijkheden voor een les waarin het begrip kansen wordt geïntroduceerd. Een optie is om rechtstreeks op zoek te gaan naar de fout in de redenering van Leibniz. Leren van een (veelgemaakte) fout is een bekende, krachtige didactiek. Je kunt ook meer op meta-niveau met je leerlingen naar zo'n situatie kijken. Hoe ga je om met vermoedens, modelleren, werkelijkheid? Hoe vind je uit wie er gelijk heeft? Hoe ver je ermee wilt gaan, is een keuze van de docent, die afhankelijk is van de doelstelling van de specifieke les. Op basis daarvan ontwerp je bijpassende vragen, opdrachten en werkvormen en bepaal je op welke wijze je ondersteuning wilt bieden.

Literatuur

- Berlinghoff, W. en Gouvêa, F. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Chorlay, R. (2016). Historical sources in the classroom and their educational effects. *Proceedings van de History and Pedagogy of Mathematics conferentie in Montpellier, 5-23*.
- Huygens, C. (1998). *Van rekeningh in spelen van geluck.* Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Mora-Charles, M.S. (1992). Quelques jeux de hazard selon Leibniz. *Historia Mathematica, 19,* 125-127.

Over de auteur

Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding, en in de vorm van workshops en lezingen.
E-mailadres: *d.a.van.den.bogaart@hva.nl*

BENZINEVERBRUIK OF EEN DIFFERENTIEQUOTIËNT

WAT ZIEN LEERLINGEN?

Pauline Vos
Gerrit Roorda

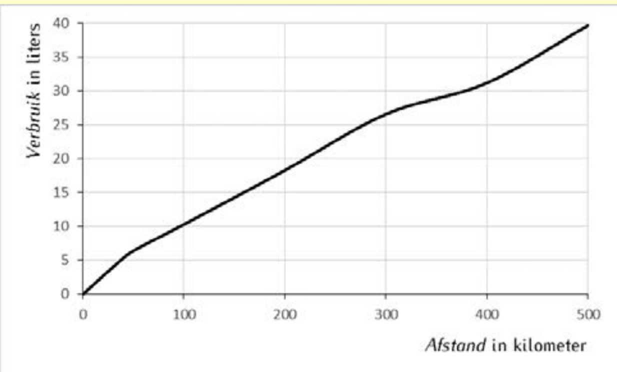
Hoe lang duurt het voordat leerlingen een wiskundig begrip, bijvoorbeeld de *afgeleide*, flexibel kunnen gebruiken? Pauline Vos en Gerrit Roorda hebben dit onderzocht en doen verslag in twee artikelen. In de vorige *Euclides* is het theoretisch kader geschetst, in deze bijdrage wordt het werk van leerlingen geanalyseerd. De leerlingen volgden wiskunde B. Ze werden geïnterviewd aan het begin en eind van vwo 5, en aan het begin van vwo 6.

Benzineopgave

In een auto is een meetsysteem aangebracht, waarmee elke 10 kilometer gemeten wordt hoeveel benzine de auto heeft verbruikt. Tijdens een rit van 500 kilometer zijn de metingen genoteerd. In de tabel zie je enkele metingen die tijdens deze rit zijn gemaakt.
De gereden afstand is a (in km) en de hoeveelheid verbruikte benzine is V (in liter).

a (km)	10	20	30	50	100	200	300	400	500
V (liter)	1,3	2,7	4,0	6,4	10,3	18,3	26,6	31,2	39,7

$V(a)$ is het verbruik na a km.
Alle metingen zijn in een grafiek gezet en daarna is een vloeiende grafiek getrokken door de punten.



Wat betekent in deze situatie $\dfrac{V(a+h)-V(a)}{h}$?

(In deze formule is h een waarde die je zelf mag kiezen)

figuur 1

Casus Elly

In het eerste interview (najaar vwo 5) vraagt Elly zich af waar de h voor staat en gebruikt als getallenvoorbeeld $V = 1$, $a = 10$ en $h = 4$ en zegt: 'Dan wordt het dus 10 + 4 – 10 gedeeld door 4, maar wat dat dan betekent, geen idee.' Ze kan de functienotatie niet goed interpreteren. Omdat ze niets zegt over de context classificeren we haar aanpak als **wiskundegericht** (en zwak). In het tweede interview (voorjaar vwo 5) zegt Elly: 'Ik snap niet wat die h is, en waarom je die zelf mag kiezen.'
Ze gebruikt getallen uit de tabel en schrijft op: 1,3(10 + 10) – 1,3(10) / 10. Over het antwoord 1,3 merkt ze op: 'Ik krijg er een getal uit dat ik al heb.' Ze ziet *V(a)* niet als functie, maar als vermenigvuldiging $V{\cdot}a$. We classificeren haar aanpak opnieuw als **wiskundegericht.** In het laatste interview (najaar vwo 6) verandert Elly de h in een x en zegt: 'Dan zit ik ook niet steeds te denken dat h de hoogte is of zo.' Ze vult in 1,3(10+3) – 1,3(10) / 10 en zegt: 'Ik snap niet wat ze met die formule willen. Wat het betekent, en waarvoor je het gebruikt: geen idee.' We classificeren haar aanpak wederom als **wiskundegericht.** Opvallend is, dat ze in geen van de interviews uitspraken doet over de benzinecontext. Overigens, Elly is geslaagd met voor wiskunde B1 zowel op het schoolexamen als op het centraal schriftelijk examen een 5,9.

Casus Nico

In het eerste interview (najaar vwo 5) zegt Nico over de grafiek: 'Dus hoe steiler de lijn loopt, hoe groter zijn verbruik per kilometer is.' Dit is een correcte interpretatie van de grafiek, maar het is geen interpretatie van het differentiequotiënt. Hij interpreteert de notatie $V(a{+}h)$ als vermenigvuldiging, $V{\cdot}a + V{\cdot}h$, en zegt: 'Als je alle haakjes zou wegwerken komt er gewoon V uit, dat is gewoon het verbruik.' Hij merkt op dat hij geen idee heeft wat de h is. Als de interviewer vraagt naar de betekenis van het differentiequotiënt in deze context zegt hij: 'Het gemiddelde

verbruik van de auto; waarom zou je iets anders gaan uitrekenen?' Hij gaat dus binnen de context op zoek naar een zinvolle betekenis, maar kan dit niet verbinden met het differentiequotiënt. Vanwege die laatste zin, en omdat hij de grafiek binnen de context interpreteert, classificeren we zijn aanpak als **contextgericht** (en zwak).

In het tweede interview (voorjaar vwo 5) interpreteert Nico de notatie $V(a)$ niet langer als vermenigvuldiging maar als het verbruik na a kilometer. Maar hij stelt $V(a + h)$ gelijk aan $V(a)+ V(h)$, en schrijft op: $V(h)/h$ en daarachter 'V bij 1 eenheid h gemiddeld'. Vervolgens neemt hij een getallenvoorbeeld uit de tabel: bij 100 km is het verbruik 10 liter. De waarde 10/100, dus 0,1 liter per kilometer is het gemiddelde verbruik, aldus Nico. Als de interviewer vraagt of het uitmaakt of je voor h tien of honderd kiest, beredeneert hij dat het niet uitmaakt; want h/h is weer gelijk aan 1. Omdat hij wederom op de context leunt, classificeren we zijn aanpak opnieuw als **contextgericht**.

In het laatste interview (najaar vwo 6) berekent Nico op basis van waarden uit de tabel: 39,7/500 en 1,3/10 (dat zijn dus $V(500)/500$ en $V(10)/10$). Hij zegt daarbij dat er geen constant verbruik is: 'anders zou de grafiek recht zijn'. Hij interpreteert het differentiequotiënt als 'het verbruik van h gedeeld door h zelf', maar zegt ook dat het gaat om een traject: 'Dus een meerafstand h die je aflegt en dat gedeeld door h (..) Dus de formule betekent wat je verbruik is op een bepaalde km [wijst enkele punten op de grafiek aan] op dat traject zeg maar. Ongeveer denk ik.' De zin die hij uiteindelijk op papier opschrijft is: 'het verbruik per kilometer tijdens afstand h'. Deze interpretatie komt goed in de buurt van de betekenis van het differentiequotiënt binnen de context, en daarom classificeren we zijn interpretaties opnieuw als **contextgericht**, met de aantekening dat zijn bewoordingen veel duidelijker zijn geworden. Wat verder opvalt, is dat Nico de grafiek in zijn uitspraken betrekt, en dat hij op geen enkel moment uitspraken doet over richtingscoëfficiënten, raaklijnen of andere aspecten van de afgeleide.

Overigens, Nico is uiteindelijk geslaagd met voor wiskunde B12 op het schoolexamen een 4,5 en op het centraal schriftelijk examen een 5,3.

Casus Bob

In het eerste interview (najaar vwo 5) interpreteert Bob het differentiequotiënt na enig nadenken als: 'Misschien kun je hier zeg maar het verbruik dat je hebt gedaan... [...], het zou zelfs het verbruik in liter per km kunnen zijn.' Hij neemt een voorbeeld en stelt $a = 40$. Hij zegt: 'Dan krijg je hier dus het verbruik 40, en hier is het verbruik 40 plus een bepaalde waarde.' Daarna zegt hij dat het om gemiddeld verbruik in liter per kilometer gaat. We beoordelen zijn uitleg als redelijk duidelijk. Omdat hij binnen de context redeneert, classificeren we zijn aanpak als **contextgericht**. In het tweede interview (voorjaar vwo 5) zegt Bob meteen dat het om het verbruik over een bepaalde afstand gaat. Hij onderzoekt dit met een getallenvoorbeeld door naar het verbruik op het traject van 200 naar 300 kilometer te kijken. Op basis van dit voorbeeld zegt hij: 'Het is het verbruik tussen twee punten van de afgelegde weg, [...] hoeveel hij verbruikt heeft terwijl hij die 100 kilometer aflegt.' Hij zegt dat het differentiequotiënt zoiets is als $V_{eind} - V_{begin}$ gedeeld door de afgelegde weg. Dan zegt hij: 'Ja, ik denk eigenlijk dat dit het gemiddeld verbruik is. Want als je het verbruik terwijl hij zoveel kilometer aflegde weet, dan zou dit het gemiddeld verbruik zijn, per kilometer.' Hij interpreteert dus het differentiequotiënt eerst als het verbruik tussen twee verschillende punten, maar vervolgens als het gemiddeld verbruik per kilometer. Zijn uitleg met behulp van een voorbeeld is veel duidelijker dan in het eerste interview. Opnieuw interpreteert hij het differentiequotiënt binnen de beschreven context en opnieuw relateert hij het differentiequotiënt aan geen andere aspecten van de afgeleide. Dit classificeren we opnieuw als **contextgericht**.

In het laatste interview (najaar vwo 6) streept Bob in eerste instantie de a's tegen elkaar weg en interpreteert hij het differentiequotiënt als $V(h)/h$. Vervolgens verandert hij dit, omdat al a km is afgelegd. Hij tekent vervolgens een lijn met startpunt 0 (zie figuur 2), geeft het interval van a tot h aan en zegt: 'Het is in dit stuk het verbruik per kilometer.' Hij noemt voorbeelden zoals: 'hoeveel hij van 50 tot 100 of van 400 tot 500 per kilometer verbruikt heeft'. De interviewer vraagt naar de rol van de h. Bob zegt: 'Ik denk dat het heel vaak 1 is. Dan heb je, zeg maar, het verbruik op het moment; dat is nauwkeuriger.' En daarna: 'Ja, dan weet je hoeveel hij verbruikt, stel je kiest $a = 400$, dan weet je hoeveel hij verbruikt van 400 tot 401, ongeveer het verbruik op 400 zeg maar. Daar zit een beetje zo'n limiet van wiskunde in, dan kun je h nog kleiner maken dan 0,001 of zo.' Als eindantwoord schrijft hij op: 'Het verbruik per km tussen a en h.' Bob interpreteert dus binnen de context en relateert het differentiequotiënt aan limieten zoals behandeld bij de introductie van de afgeleide. Dit classificeren we als **integrerend**, waarbij zijn aanpak nog steeds sterk contextgericht is.

Overigens, Bob is geslaagd met op zijn schoolexamen wiskunde B12 een 7,0 en op het centraal schriftelijke examen een 7,6.



figuur 2 Bobs tekening in het laatste interview (begin vwo 6)

Casus Dorien

In het eerste interview (najaar vwo 5) zegt Dorien dat het differentiequotiënt haar bekend voorkomt: 'Dit deden we ook in hetzelfde hoofdstuk als afgeleides.' Ze zegt dat het ging over 'een kleine waarde erbij optellen', en: 'eerst 0,3 en daarna 0,03' en: 'dat je dan er telkens dichterbij kwam'. Het gaat volgens haar om 'het verbruikte aantal

liter'. Ze gaat getallen invullen, namelijk h =100 en a = 300. Ze berekent dan (32 – 27) : 100 en komt uit op 0,05, maar zegt daarover dat ze 'echt niet weet wat het betekent'. Kortom, ze herkent het differentiequotiënt uit het hoofdstuk over afgeleiden en herinnert zich dat 'het' steeds nauwkeuriger werd, maar ze weet niet goed wat 'het' is en legt het differentiequotiënt niet goed uit binnen de context. We classificeren haar aanpak als **wiskundegericht**. In het tweede interview (voorjaar vwo 5) zegt Dorien: 'Op deze manier moest ik de steilheid berekenen, en later ook de afgeleide. Deze formule werd als bewijs gebruikt voor een andere, snellere formule, en dan moest je die altijd gebruiken, en niet meer deze.' Ze brengt vervolgens het limietproces van differentiequotiënt naar differentiaalquotiënt onder woorden: 'Ik herken dat aan de opbouw van de formule, die h was eerst groter en die moest je steeds kleiner maken en dan kwam je bij een limiet, en dat was een getal dat je nooit bereikte, dat was de steilheid in één punt.' In deze context is het differentiequotiënt volgens Dorien 'hoeveel liter er per kilometer worden verbruikt'. Ze zegt: 'Als je dit bijvoorbeeld tussen 300 en 400 doet, weet je de steilheid, dus dan weet je hoeveel liter er per kilometer wordt verbruikt' (ze tekent hierbij een driehoek in de grafiek, zie figuur 3). Dorien relateert dus het differentiequotiënt aan het limietproces in de grafische representatie, maar geeft het ook betekenis binnen de context (op een groot interval). We classificeren dit als **integrerend** met een wiskundegerichte voorkeur. In het laatste interview (najaar vwo 6) zegt Dorien eerst: 'Ik zie dit staan, en daar ben ik een beetje allergisch voor. Limieten en zo, en dat het steeds dichter bij nul komt [...] dit hebben we gehad voor we de afgeleide gingen doen.' Ze legt vervolgens aan de hand van het delingsproces met een getallenvoorbeeld uit, dat het differentiequotiënt het verbruik in liters per kilometer is. Ze zegt hierover: 'Dit kun je ook schrijven als "verschil in y delen door verschil in x"; en dat is eigenlijk weer hetzelfde als de afgeleide. Je rekent uit hoeveel liter per kilometer wordt verbruikt; de snelheid van verbruik zeg maar.' Daarna associeert ze het differentiequotiënt met raaklijnen en legt het limietproces uit: 'Als je h steeds kleiner neemt, dan krijg je dat h bijna nul is. De limiet heet dat. Dan wordt het steeds nauwkeuriger.' Ook zegt ze nog: 'Ik weet nog precies dat het op die bladzijde staat aan het begin van een paragraaf.' In dit interview relateert Dorien dus opnieuw het differentiequotiënt aan verschillende aspecten van de afgeleide zoals 'het verschil in y gedeeld door het verschil in x', het limietproces en snelheid. Haar terminologie van 'de snelheid van het verbruik' is een mooi voorbeeld van transfer: hoe een natuurkundig begrip binnen een niet-natuurkundige context gebruikt kan worden. Dorien noemt dus niet alleen veel aspecten van de afgeleide, maar relateert deze ook onderling aan elkaar. Daarnaast geeft ze aan het differentiequotiënt ook betekenis binnen de context. We classificeren dit opnieuw als **integrerend.** Opvallend is verder, dat Dorien in alle interviews aangeeft dat ze het differentiequotiënt herkent uit het hoofdstuk over de afgeleide. Overigens, Dorien is geslaagd met voor wiskunde B1 op het schoolexamen een 7,6 en op het centraal schriftelijk examen een 5,6.



figuur 3 Doriens tekening in het 2e interview (voorjaar vwo 5)

Conclusies

De hierboven beschreven voorbeelden van de ontwikkeling van leerlingen zagen we ook bij de andere leerlingen. Maaike, Casper en Piet lieten, net als Elly (zie hiervoor), in alle interviews een wiskundegerichte aanpak zien. Andy liet net als Nico (zie hiervoor) in alle drie interviews een contextgerichte aanpak zien. Karin was, net als Bob (zie hierboven), in eerste instantie meer contextgericht en in de latere interviews duidelijk integrerend. Otto was, net als Dorien (zie hierboven), in eerste instantie meer wiskundegericht en in de latere interviews meer integrerend.

We zien dus dat sommige leerlingen een voorkeur hebben voor een contextgerichte aanpak, terwijl andere een voorkeur hebben voor een wiskundegerichte aanpak. Deze voorkeur blijven ze aanhouden in de opeenvolgende interviews. Daarbij zien we dat hun taal duidelijker wordt en de interpretaties verbeteren. Het ideaaltype 'integrerend' zien we voor het eerst bij enkele leerlingen aan het einde van vwo 5. Als de leerlingen in vwo 6 zijn, zien we bij vier van de tien leerlingen een integrerende aanpak, en dit is onafhankelijk van de aanvankelijke voorkeur.

Dat we in de groep van tien leerlingen meer wiskundegerichte aanpakken zien kan ermee te maken hebben dat ze een exact profiel hebben. We zijn benieuwd hoe een vergelijkbaar onderzoek met wiskunde A-leerlingen eruit zou zien. In dit onderzoek hebben we dus ontdekt dat de contextgerichte of de wiskundegerichte voorkeur door de leerlingen gedurende een jaar (of langer) wordt vastgehouden. Dit betekent dat de benzineopgave diagnostisch gebruikt kan worden. Leerlingen die een meer contextgerichte aanpak kiezen kunnen vervolgens door een docent geholpen worden om bij contextopgaven ook de wiskundige kant te leren zien. Omgekeerd kunnen leerlingen die een meer wiskundegerichte aanpak kiezen door een docent geholpen worden om ook de contextkant te leren zien.

Over de auteurs

Pauline Vos is hoogleraar Mathematics Education aan de Universiteit van Agder (Noorwegen).
Email: *fpvos@hotmail.com*
Gerrit Roorda is vakdidacticus wiskunde aan de Universitaire Lerarenopleiding van de Rijksuniversiteit Groningen en aan de Masteropleiding Leraar Wiskunde van de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden.
Email: *g.roorda@rug.nl*

CHINESE FORMULE

Martin Kindt

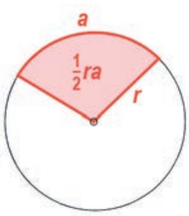
De meetkunde begon ooit met het berekenen van oppervlakten. Niet alleen van gebieden begrensd door rechte lijnen, maar ook van cirkelschijven. Martin Kindt toetst een oude Chinese benaderingsformule voor de oppervlakte van een cirkelsegment.

Cirkelsector en -segment

De *Chiu Chang Suan Shu* ofwel de *Negen hoofdstukken over de kunst der mathesis* is samengesteld in wat in de Chinese geschiedenis de Han-periode heet, dat is van 206 vóór tot 221 ná Chr. Liu Hui (ca. 220-280) schreef een uitgebreid commentaar op dit werk, met oplossingen van de problemen. Zo bereikte hij dat dit werk een plaats in de geschiedenis van de wiskunde verwierf. Het eerste van de negen hoofdstukken behandelt het opereren met breuken en de berekening van oppervlakten. Zo zijn er correcte rekenregels te vinden voor de oppervlakten van rechthoeken, driehoeken, trapezia en cirkelsectoren. Van der Waerden schrijft in *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations* [1] dat voor laatstgenoemde categorie de formule luidde:

Oppervlakte sector =

$\frac{1}{2} \times$ *straal* $\times$ *boog*



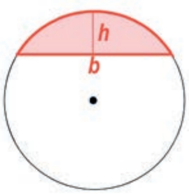
Voor een volle cirkel worden verschillende oppervlakteformules genoemd, waaronder:

oppervlakte $= \frac{1}{12}$ *omtrek in het kwadraat*,

waaruit blijkt dat π hier, evenals in het Oude Testament, gelijk aan 3 is verklaard. Deze formule, die de oppervlakte van de cirkel uitdrukt in de omtrek, is ook op een Babylonisch kleitablet te vinden.[2] Eigenlijk is dit wel een mooie vuistregel voor als je de oppervlakte van de dwarsdoorsnede van een boom wilt weten: meet de omtrek, kwadrateer de uitkomst en deel dan door 12. Het herleiden van $O = \frac{1}{4\pi} \cdot p^2$ uit $O = \pi r^2$ en $p = 2\pi r$ is trouwens een prima algebraoefening voor school. Opzienbarend in de Chinese tekst is de formule voor de oppervlakte van een cirkelsegment:

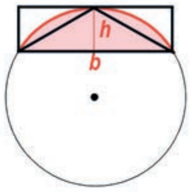
Oppervlakte segment =

$\frac{1}{2} \times (hb + h^2)$



Heron van Alexandrië (1ste eeuw na Chr.) vermeldt dat de 'Ouden' de formule $\frac{1}{2}h\,(b+h)$ gebruikten en zegt erbij dat deze gebaseerd lijkt op het idee dat de omtrek 3 maal de diameter is.

$$\tfrac{1}{2}hb < \tfrac{1}{2}h(h+b) < hb = \tfrac{1}{2}h(b+b)$$



Onderzoek van de Chinese formule

Ik beperk me tot segmenten die hoogstens gelijk zijn aan een halve cirkelschijf. In dat geval is het duidelijk dat de oppervlakte van het segment in ligt tussen de oppervlakte van de ingeschreven gelijkbenige driehoek en de omgeschreven rechthoek. Dat rijmt dan met:

Maar dit zegt natuurlijk helemaal niets over de juistheid of nauwkeurigheid van de formule. Een verstandige manier om formules te testen, is om eerst een paar speciale gevallen te bekijken. Ik begin met de halve cirkel, dus $h = r = \frac{1}{2}b$. Dat zou dan opleveren:

oppervlakte halve cirkel $= \frac{1}{2}r\,(r + 2r) = \frac{1}{2} \cdot 3\,r^2$.

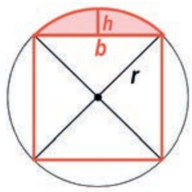
Door een Chiu-Chang-Suan-Shu-bril bekeken ($\pi = 3$) klopt dat als een bus. Maar evenals Heron weten we nu dat de formule hooguit een aardige benadering geeft. Er is nog een geval waarbij de formule schijnbaar goed is, namelijk voor een segment in een kwartcirkel.

De oppervlakte van zo'n segment uitgedrukt in de straal r is, in de veronderstelling $\pi = 3$, eenvoudig gelijk aan $\frac{1}{4}(3r^2 - 2r^2) = \frac{1}{4}r^2$.

Dit resultaat wordt ook geleverd door de *h*-*b*-formule:

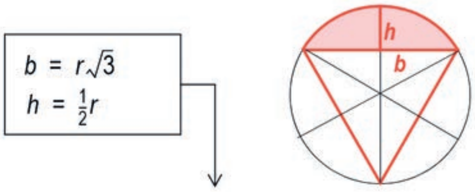
$b = r\sqrt{2}$

$h = r - \frac{1}{2}r\sqrt{2}$



$$\tfrac{1}{2}h(b+h) = \tfrac{1}{2}(r - \tfrac{1}{2}r\sqrt{2})(r + \tfrac{1}{2}r\sqrt{2}) = \tfrac{1}{4}r^2$$

Als derde proef op de Chinese formule bekijk ik het segment dat past bij een sectorhoek van 120°. Daartoe wordt het ingeschreven vierkant ingewisseld voor een regelmatige driehoek:



$$\tfrac{1}{2}h(b+h) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}r\cdot(r\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}r) = (\tfrac{1}{4}\sqrt{3}+\tfrac{1}{8})r^2$$

$$\textit{Oppervlakte segment} = \tfrac{1}{3}(3r^2 - \tfrac{3}{4}r^2\sqrt{3})$$

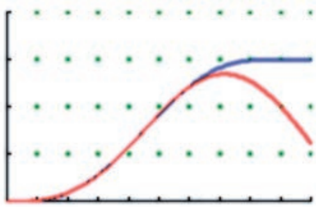
Nog te vergelijken: $1-\frac{1}{4}\sqrt{3}$ en $\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{8}$.

Met de wetenschap dat $\sqrt{3}$ irrationaal is, hoeven we aan de ongelijkheid van die twee waarden niet te twijfelen, maar om een idee van de (on)nauwkeurigheid te krijgen is het toch aardig om na te gaan dat 'ongeveer gelijkstellen' leidt tot $\sqrt{3}\approx\frac{7}{4}$, een benadering die men ook tegenkomt in de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{3}$.

Vergelijken van formules met de GR

Met de grafische rekenmachine (of andere programmatuur) kan de Chinese formule goed worden vergeleken met een correcte formule. Als ik $r = 1$ stel en als x de halve hoek (in graden) is, van de sector waar het cirkelsegment strak in past, dan is de oppervlakte van het segment:
$\frac{2x}{360}\cdot\pi-\frac{1}{2}\cdot\sin(2x)$.

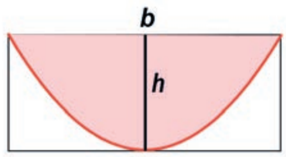
Er geldt voor zo'n segment ook:
$b = 2\sin x$ en $h = 1 - \cos x$.
Volgens de Chinese formule is de oppervlakte dan:
$\frac{1}{2}(1 - \cos x)(1 - \cos x + 2\sin x)$.
Om de Chinese formule een 'eerlijke' kans te geven, vervang ik π door 3 en vergelijk op mijn GR
$Y_1 = X/60 - 0.5\sin(2X)$ met
$Y_2 = 0.5(1 - \cos(X))(1 - \cos(X) + 2\sin(X))$.
Als ik de Y-tabellen vergelijk, dan zijn de verschillen klein (en inderdaad 0 bij 45 en 90). Ook als ik de halve cirkel voorbijga, gaat het nog een poosje aardig goed.
Als je de twee grafieken op het scherm vergelijkt, dan zijn die tot - zeg maar $x = 130$ - nauwelijks van elkaar te onderscheiden.



Als je de Y1 corrigeert via de π-benadering van de GR zie je twee grafieken die iets minder *close* zijn, en ook wat eerder (bij $x = 110$) afscheid van elkaar nemen. Kortom: die Chinese formule was zo gek nog niet, al blijft de achtergrond ervan in nevelen gehuld. Heron, die in cirkelberekeningen de bovenschatting van Archimedes ($\pi\approx 3\frac{1}{7}$) gebruikte, gaf een aanpassing van de formule, zodat die weer klopt bij de halve schijf:
$\frac{1}{2}h(b+h)+\frac{1}{14}(\frac{1}{2}b)^2$.
Een grafisch onderzoek, waarbij ik aan de formule van Y_2 de Heron-term toevoeg en de formule van Y_1 aanpas door X/60 te vervangen door 11X/360 leert dat de grafieken nog meer samenvallen, maar wel iets eerder uit elkaar gaan.

Nog een paar formules met basis en hoogte

Lijkt het geen aardig idee om zo'n onderzoekje eens met een klas uit te voeren? Het feit dat in de Oudheid in verschillende culturen eenzelfde benaderingsformule heeft rondgezongen, is op zich al heel belangwekkend. Dat Chinese wiskunde doorgesijpeld zou zijn in Egypte of Babylon of vice versa is nauwelijks te geloven en historici hebben hiervoor, zover ik weet, ook geen antwoord op. In het algemeen gesproken, denk ik dat het heel goed zou zijn om met een klas af en toe in de rijke geschiedenis van de wiskunde te duiken en de leerlingen te laten ervaren dat wiskunde mensenwerk is. Bij de integraalrekening in de bovenbouw kun je dit onderzoekje nog een vervolg geven. Kun je basis-hoogteformules bedenken voor segmenten bij andere krommen dan de cirkel. Voor een symmetrisch



oppervlakte paraboolsegment = $\frac{2}{3}\cdot hb$

segment van de parabool geldt exact:
Voor 'superparabolen', $y = x^4$, $y = x^6$, ... kun je soortgelijke (en exacte) formules vinden. In het algemeen bij $y = x^{2n}$ geldt:
$\textit{oppervlakte segment} = \frac{2n}{2n+1}hb$.
Dat deze oppervlakte voor $n \to \infty$ nadert tot hb is niet zo verrassend, als je bedenkt hoe de segmenten bij de krommen $y = x^4$, $y = x^6$, ... steeds dichter naar de basishoekpunten van de omhullende rechthoek kruipen. Voor andere even functies heb ik geen elegante exacte expressies in h en b kunnen vinden.

Noten

[1] Waerden, B.L. van der (1983). *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlijn: Springer Verlag.
[2] Robson, E. (2008). *Mathematics in Ancient Iraq*. Princeton: Princeton University Press, p. 66.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

NOG MAAR EENS DE TRISECTIE

Dick Klingens

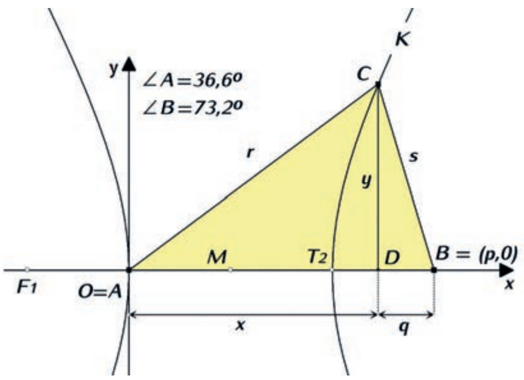
Dat de trisectie van een hoek niet te construeren is, dat weet iedereen wel. In *Geogebra* zit dan ook geen knop 'verdeel de hoek in drie gelijke delen'. Maar de constructie kan wél met de knoppen van *Geogebra*. Zonder de hoek op te meten, wel te verstaan. Dick Klingens laat zien hoe dat gaat en waarom de methode klopt.

Meetkundige plaats

We beginnen met een niet zo eenvoudig probleem uit de (analytische) meetkunde. Nadat we het hebben opgelost, zullen we hetgeen we hebben gevonden, gebruiken bij een 'oud probleem' (ach, de kop van dit artikel verraadt het al).

Opgave. In een gegeven driehoek ABC is hoek B twee keer zo groot als hoek A. Bepaal (de vergelijking van) de meetkundige plaats K van de punten C (bij veranderlijke hoek A).

Het is direct duidelijk dat hoek A kleiner moet zijn dan 60º. Hoek B is in dat geval immers kleiner dan 120º, en samen zijn ze nu kleiner dan 180º (en dat moet in een driehoek).
Voor de oplossing van het probleem plaatsen we de driehoek in een orthonormaal assenstelsel xOy (zie figuur 1), waarvan de x-as de drager is van het lijnstuk AB en waarvan het punt O samenvalt met het punt A. We stellen de coördinaten van het punt B gelijk aan $(p, 0)$ en die van het punt C gelijk aan (x, y).
En dan proberen we een relatie te vinden tussen die x en y (uiteraard is die afhankelijk van p), waarbij we kiezen voor een goniometrische aanpak.



figuur 1

We stellen de grootte van hoek A gelijk aan θ.
Verder is ook, met D als projectie van C op de x-as, zie figuur 1:

$OD = x$, $CD = y$, $DB = q$, $AC = r$ en $BC = s$ (en daarmee geldt $p = x + q$)

In driehoek ADC gelden nu onder meer de volgende relaties:

$x = r \cdot \cos\theta$, $y = r \cdot \sin\theta$

zodat in driehoek BDC geldt:

$$\angle B = 2\theta \Rightarrow \frac{y}{s} = \sin(2\theta) \Rightarrow s = \frac{y}{\sin(2\theta)} = \frac{r\sin\theta}{\sin(2\theta)}$$

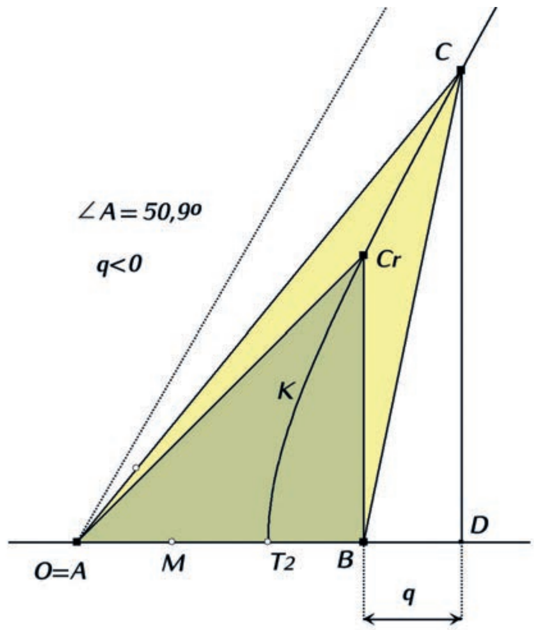
Volgens de stelling van Pythagoras geldt in die driehoek ook de relatie $q^2 = s^2 - y^2$.
En daaruit vinden we door substitutie en verdere uitwerking:

$$q^2 = \left(\frac{r\sin\theta}{\sin(2\theta)}\right)^2 - (r\sin\theta)^2 = r^2\sin^2\theta \cdot \left(\frac{1}{\sin^2(2\theta)} - 1\right)$$

$$= r^2\sin^2\theta \cdot \frac{1-\sin^2(2\theta)}{\sin^2(2\theta)} = r^2\sin^2\theta \cdot \frac{\cos^2(2\theta)}{\sin^2(2\theta)}$$

Hieruit volgt: $q = r\sin\theta \cdot \dfrac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}$

Merk op dat q negatief is (gerekend moet worden) als $45^\circ < \theta < 60^\circ$; zie figuur 2.



figuur 2

Uit $p = x + q$ volgt dan na vermenigvuldiging met $2x = 2r \cdot \cos\theta$:

$$2px = 2x^2 + (2r\cos\theta)\cdot r\sin\theta \cdot \frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}$$

$$= 2x^2 + r^2 \cdot 2\sin\theta\cos\theta \cdot \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin(2\theta)}$$

$$= 2x^2 + r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta$$

$$= 2x^2 + x^2 - y^2$$

zodat het verband tussen de coördinaten (x, y) van het punt C is: $3x^2 - 2px - y^2 = 0$. En dit is een vergelijking van een hyperbool; zie weer figuur 1.
Omdat θ een scherpe hoek is, is x positief. De meetkundige plaats K van het punt C is dus alleen de *rechtertak* van de hyperbool. En van die tak is het snijpunt T_2 met de x-as uitgezonderd, omdat driehoek ABC dan ontaard is (punt C op de x-as en hoek A en hoek B beide gelijk aan 0°).
Eenvoudig is in te zien dat de hyperbool door $A = (0, 0)$ en door $T_2 = (\frac{2}{3}p, 0)$ gaat; beide punten zijn toppen van de hyperbool. De standaardvorm van K (met 'halve' assen $a = \frac{1}{3}p$ en $b = \frac{1}{\sqrt{3}}p$) is:

$$\frac{(x - \frac{1}{3}p)^2}{(\frac{1}{3}p)^2} - \frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}}p)^2} = 1 \; (x > 0)$$

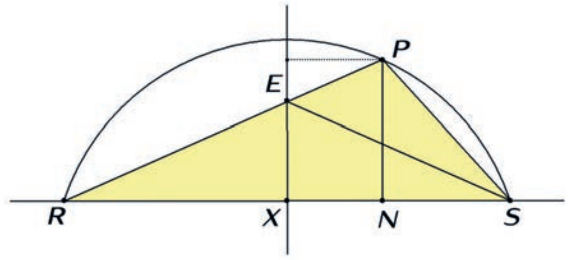
Daaruit zien we dat $M = (\frac{1}{3}p, 0)$ het middelpunt van de hyperbool is. Is c de halve brandpuntsafstand, dan is: $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{9}p^2 + \frac{1}{3}p^2 = \frac{4}{9}p^2$, waaruit volgt dat $c = \frac{2}{3}p$.
Wegens (zie opnieuw figuur 1) $MB = OB - OM = p - \frac{1}{3}p = \frac{2}{3}p = c$, is het punt B een brandpunt van de hyperbool.
Voor de waarde van de zogenoemde excentriciteit ε van deze hyperbool vinden we:[1]

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\frac{2}{3}p}{\frac{1}{3}p} = 2$$

De *excentriciteit* van een kegelsnede is de verhouding van de afstand van een punt van de kegelsnede tot een brandpunt en de afstand van dat punt tot de bij dat brandpunt behorende richtlijn.

Bewijs van Pappos

We kunnen de in de vorige paragraaf gevonden hyperbool gebruiken om een hoek in drie gelijke delen te verdelen. Dit laatste staat in de wiskunde bekend onder de naam *trisectie*. De trisectie waarbij gebruik wordt gemaakt van een hyperbool, is voor het eerst beschreven door Pappos van Alexandrië (ca. 290 – ca. 350, Egypte). We laten hieronder een van de twee door Pappos gegeven bewijzen (en niet diens constructie) min of meer volgen.[2] En dan blijkt ook dat we het in de vorige paragraaf vermelde probleem (het vinden van de meetkundige plaats) heel wat eenvoudiger kunnen oplossen.
We nemen aan dat de cirkelboog RS door het punt P zo verdeeld is dat $bg(SP) = \frac{1}{3}\, bg(SPR)$, zie figuur 3.



figuur 3

Dan is:
$\angle RSP = 2 \cdot \angle SRP$ (omtrekshoeken op dezelfde cirkel).
De lijn SE is de bissectrice van hoek RSP, waarbij E op RP ligt. De lijnen EX en PN staan beide loodrecht op RS.
Dan is $RX = SX$ (driehoek ERS is gelijkbenig), waarbij X een vast punt is (het midden van RS).
Ook is $RS : PS = RE : PE$ (bissectricestelling) en $RE : PE = RX : NX$ (evenwijdigheid).
Zodat $RS : PS = RX : NX$. Maar $RS = 2 \cdot RX$, zodat $2 : PS = 1 : NX$. Met andere woorden: $PS = 2 \cdot NX$.
De lengte van het lijnstuk NX is gelijk aan de afstand van het punt P tot de loodlijn in X op de lijn RS.
Hieruit blijkt dat het punt P ligt op een hyperbool met brandpunt S en met XE als richtlijn. En de excentriciteit van de hyperbool is gelijk aan 2.

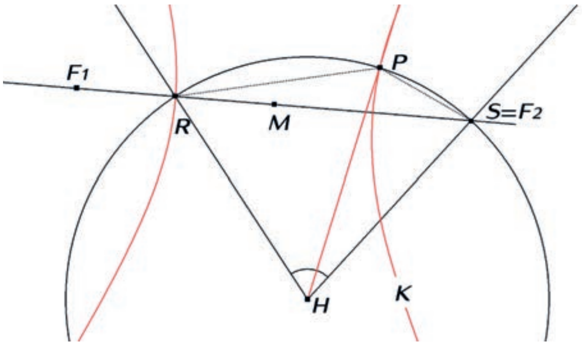
Constructie?

Het probleem van de trisectie van een hoek is – zoals opgemerkt – een 'oud probleem'. Het is één van de drie klassieke meetkundeproblemen, naast dat van de kwadratuur van de cirkel en van de verdubbeling van de (inhoud van de) kubus.
De hulpmiddelen voor het construeren van vlakke figuren in de oud-Griekse wiskunde waren de passer en het 'latje' (een blanco liniaal zonder onderverdeling). Bewezen is (in 1837 door Pierre Laurent Wantzel) dat trisectie met deze hulpmiddelen alléén niet mogelijk is. Laten we echter ook de mogelijkheid tot het 'tekenen van een hyperbool' als extra hulpmiddel toe, dan kunnen we de trisectie wél uitvoeren. Moderne dynamische meetkundeprogramma's, zoals bijvoorbeeld *GeoGebra*,[3] hebben deze mogelijkheid.
In *GeoGebra* zit een standaardfunctie voor de 'constructie' van een hyperbool waarvan een punt en de twee brandpunten gegeven zijn, zie figuur 4.



figuur 4 Constructie van een hyperbool in *GeoGebra*

De constructiestappen voor een constructie binnen *GeoGebra* zijn, uitgaande van een gegeven hoek H, zie figuur 5:



figuur 5

- teken een cirkel met middelpunt H en willekeurige straal;
- bepaal de snijpunten R en S ervan met de benen van de hoek;
- (optioneel) teken de lijn RS;
- bepaal het punt M (het middelpunt van de hyperbool), dat het beeld van S is bij een vermenigvuldiging (homothetie) met centrum R en factor $\frac{1}{3}$;
- bepaal het punt F_1 als puntspiegelbeeld van M in het punt R;
- teken de hyperbool K met als brandpunten F_1 en $S = F_2$ en met punt R als punt *op* de hyperbool;
- bepaal P als snijpunt van de hyperbool met de cirkel(boog) RS;
- de lijn HP is dan een *trisectie* van de hoek H.

Opmerkingen
- De in de constructie gebruikte hyperbool heeft noodzakelijk 2 als excentriciteit. De lezer vergelijke figuur 5 met figuur 3.
- De tweede trisectrice van een hoek kan gevonden worden als spiegelbeeld van de eerste in de bissectrice van de hoek.

Het bewijs van de juistheid van bovenstaande constructie is eenvoudig. Een en ander volgt direct uit de eigenschappen van middelpuntshoeken van een cirkel. Immers, we hebben hierboven gezien dat het punt P (als punt van de hyperbool) de cirkelboog RPS verdeelt in stukken RP en PS die zich verhouden als 2 : 1.
De middelpuntshoeken RHP en PHS staan opvolgend op de deelbogen RP en PS van die boog.
Inderdaad is dan $\angle RHP = 2 \cdot \angle PHS$.

Noten

[1] Zie voor de afleiding van de formule voor de excentriciteit van een hyperbool: Klingens, D. (1999). *Kegelsneden en hun vergelijkingen.* Op: www.pandd.demon.nl/kever.htm#42

[2] Heath, T.L. (1981). *A History of Greek Mathematics. Deel 1.* New York: Dover Publications, p. 243. Hierin wordt verwezen naar boek IV van Pappos' *Synagoge*.

[3] Zie de website: *www.geogebra.org*

Over de auteur

Dick Klingens was van april 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Gedurende enkele jaren was hij lid van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo.
E-mailadres: *dklingens@gmail.com*

KLEINTJE DIDACTIEK

HAAKJES WEGWERKEN ALS ER EEN 'MIN' VOOR STAAT

In de boeken van *Getal & Ruimte* en *Mathplus* wordt aan leerlingen $4 - (x - 2) = 4 - x + 2$ ongeveer als volgt uitgelegd: $4 - (x - 2) = 4 - 1 \times (x - 2) = 4 - 1 \times x - 1 \times -2 = 4 - x + 2$. Voor veel leerlingen werkt deze uitleg eerder verwarrend dan verhelderend. Een alternatief is om aan te sluiten bij wat leerlingen op de basisschool geleerd hebben. Zo'n gesprekje gaat ongeveer als volgt.
Stel we willen 30 – 18 berekenen. Dat kan direct uit het hoofd. Maar het is ook mogelijk om via een rond getal te rekenen. (Op de basisschool wordt met een rond getal bedoeld het tiental dat het dichtste bij 18 ligt). Dus we halen dan eerst 20 van de 30 af. Dan hebben we er 2 te veel afgehaald. Die moeten er weer bij. Het wordt dan dus: 30 – 20 + 2 (= 10 + 2) = 12. Wat hebben we nu gedaan? 30 – 18 is kennelijk gelijk aan 30 – 20 + 2.
Maar in 30 – 18 kun je de 18 ook vervangen door 20 – 2 dus dan wordt het: 30 – (20 – 2). Dus zijn deze twee gelijk.
Op het bord staat dan onder elkaar:
30 – 18 = 30 – 20 + 2
30 – 18 = 30 – (20 – 2)
Dus 30 – (20 – 2) = 30 – 20 + 2
Vaak voeg ik dan ook nog iets toe als: anders gezegd: als we de haakjes weglaten, halen we er te veel af, namelijk 20. We moesten er 18 afhalen dus is er 2 te veel af en die moet er dus weer bij. Op het bord komt vervolgens dat het net zo gaat met: $4 - (x - 2) = 4 - x + 2$. Daarbij herhaal ik dat we bij het weglaten van de haakjes er te veel afhalen, hier x. We moesten er minder afhalen, namelijk $x - 2$ en dat is 2 minder dan x. Die 2 gaan er dus weer bij.

Lonneke Boels

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*

Wachtwoordmanager in je hoofd



Het blijkt verrassend makkelijk om een procedure uit je hoofd te leren waarmee je tientallen sterke wachtwoorden kunt onthouden. Volgens wiskundige Samira Samadi is dat een stuk veiliger dan al je wachtwoorden in een wachtwoordmanager stoppen, of maar één wachtwoord gebruiken voor al je logins. Samira Samadi is een Iraanse wiskundige die aan het Georgia Institute of Technology in de Verenigde Staten onderzoek doet naar 'mentale algoritmes' om wachtwoorden te onthouden. Schertsend wordt dat ook wel het 'naakte man in de woestijn'-probleem genoemd: verzin een procedure waarmee je uit het blote hoofd, zonder enig hulpmiddel, een stuk of twintig willekeurige wachtwoorden kan reconstrueren. Eh... daar hebben we tegenwoordig toch wachtwoordmanagers als LastPass of Dashlane voor, handige apps die al je wachtwoorden beheren, beveiligd met één master wachtwoord? Samadi: 'Het probleem met wachtwoordmanagers is dat mensen er afhankelijk van worden, want ze weten al hun andere wachtwoorden niet meer. Dus moeten ze die app op al hun apparaten installeren. Er zijn genoeg voorbeelden van mensen wier master wachtwoord gehackt is, waarna al hun wachtwoorden op straat lagen.' De mentale algoritmes die Samadi bestudeert, hebben een bijzondere veiligheidseigenschap: ze zijn vrij resistent tegen gehackte wachtwoorden. Dat wil zeggen: als iemand een van je wachtwoorden ontdekt – bijvoorbeeld doordat hij over je schouder meekijkt als je inlogt op facebook – én hij weet welk algoritme je gebruikt, dan nog kan hij vrijwel zeker niet een van je andere wachtwoorden ontdekken. Wie nieuwsgierig is geworden naar de procedure kan op internet meer informatie vinden.

Bron: Kennislink 2016

Donald Trump en andere rampen

Hoe heeft het zo ver kunnen komen? Dat is wat commentatoren in en buiten de VS zich verbijsterd afvroegen toen Donald Trump de republikeinse presidentskandidaat werd en vervolgens met een minderheid aan stemmen ook de president werd. Econoom en wiskundige Eric Maskin, die in 2007 de Nobelprijs voor economie won, heeft daar een simpel technisch antwoord op: Trump is een *spoiler*, een verkiezingsverpester. Het systeem van de Amerikaanse maar ook bijvoorbeeld de Franse presidentsverkiezingen maakt ze kwetsbaar voor *spoilers*, kandidaten die één tegen één nooit zouden winnen, maar die wel de einduitslag veranderen. Nobelprijswinnaar Eric Maskin, expert in speltheorie, pleit voor het Condorcet-stemsysteem, waarbij iedere stemmer zijn eigen ranglijstje van kandidaten invult. Weliswaar is dan een eenduidige uitslag niet gegarandeerd, maar volgens Maskin is dit een theoretisch bezwaar dat in de praktijk zelden of nooit zal optreden.
Maskin: 'Trump haalde in geen van de eerste zeventien republikeinse voorverkiezingen een meerderheid, maar profiteerde ervan dat hij verreweg de meest extreme kandidaat was: de meerderheid die niet op Trump stemde, verdeelde zijn stemmen elke keer over meerdere, meer gematigde kandidaten.' Dus kwam Trump in de ene na de andere voorverkiezing als grootste uit de bus, en gold hij voor de media en in de ogen van het publiek als 'de winnaar'. Zeker in de VS wordt dat al gauw een *self-fullfilling prophecy*.
Er zijn allerlei verkiezingssystemen en geen ervan is in alle opzichten ideaal, maar volgens Maskin is de minst slechte van allemaal het Condorcet-systeem, waarbij elke kiezer een ranglijst van favorieten opgeeft. Als er veel kandidaten zijn, hoef je ze niet allemaal in je ranglijst op te nemen; je geeft bijvoorbeeld alleen je 1e, 2e en 3e favoriet aan. Maskin: 'Je wilt dat kiezers die ranglijst samenstellen op basis van zinnige informatie. Dan is een ranglijst van twintig kandidaten voor de meesten niet realistisch.'
In dit systeem wint de kandidaat die bij meer kiezers in hun ranglijst boven elke andere kandidaat staat dan andersom. 'De uitkomst van de verkiezingen met de hand bepalen is niet meer te doen,' aldus Maskin, 'dus dan moet je de stemmen met een computer verwerken. Misschien is dat de reden dat er nu pas gepleit wordt voor dit systeem, hoewel het al heel lang bekend is.'

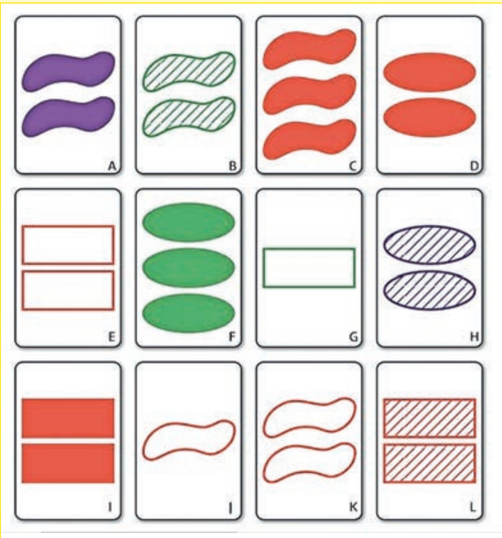
Bron: Kennislink 2016

Handschriftherkenning voor wiskundeformules

Fred Muller (Freudenthal Instituut, UU, en Faculteit Wijsbegeerte, EUR), Arthur Bakker (Freudenthal Instituut) en Jan Broersen (Theoretische Filosofie, UU) ontvangen een NWO Creatieve Industrie-subsidie van ruim één miljoen euro voor onderzoek naar digitale tools in wiskundeonderwijs en handschriftherkenning voor wiskundeformules. Het project, genaamd The Digital Turn in Epistemology, is een samenwerking tussen de Universiteit Utrecht, de Rotterdamse Faculteit der Wijsbegeerte en Noordhoff Uitgevers. In dit multidisciplinaire project onderzoeken filosofen samen met wiskundeonderwijson-

derzoekers hoe de aard van wiskundige kennis door het gebruik van digitale tools verandert en wat dit voor consequenties heeft voor de epistemologie van de wiskunde. De onderzoekers benaderen vanuit verschillende perspectieven het kruisvlak tussen wijsbegeerte, wiskundeonderwijs en digitale hulpmiddelen. Het project sluit aan bij de doelstellingen van de Universiteit Utrecht om onderwijsvernieuwing te stimuleren en de kwaliteit van het onderwijs te verbeteren.Een meer praktische component van het project is de ontwikkeling van handschriftherkenning voor wiskundeformules. Dit ICT-hulpmiddel wordt in nauwe samenwerking met Noordhoff Uitgevers ontwikkeld. Zij doen een belangrijke investering in kwaliteitsverbetering van het wiskundeonderwijs en bouwen daarmee voort op de succesvolle samenwerking met het Freudenthal Instituut bij de ontwikkeling van de Digitale Wiskunde Omgeving (DWO). *Bron: Universiteit Utrecht*

Zes sets



In het vorige nummer stond deze afbeelding van Setkaarten, waarbij werd gemeld dat er zes sets in zouden zitten. Het spel Set is een in 1974 door Marsha Falco ontworpen kaartspel. Het spel bestaat uit 81 kaarten waarop symbolen afgebeeld staan, waarbij vier eigenschappen elke kaart uniek maken: de hoeveelheid symbolen en de kleur, vulling en vorm ervan. Het doel van het spel is om zoveel mogelijk sets van drie kaarten te verzamelen. Drie kaarten vormen alleen een set, als voor elk van de vier eigenschappen afzonderlijk geldt dat de eigenschap ofwel op alle drie kaarten gelijk is, ofwel op elke kaart verschillend is. Op verzoek van een lezer de oplossing van de 'puzzel'. Aan u de uitdaging de oplossing hieronder te controleren op juistheid en te onderzoeken of er wellicht meer sets uit deze twaalf kaarten te maken zijn. De zes sets zijn: GHC, GBF, KLD, ABK, ILE, GBF.

Gymnasium Camphusianum wint 25e wiskundetoernooi

Het team van het Gymnasium Camphusianum uit Gorinchem heeft de jubileumeditie van het wiskundetoernooi van de Radboud Universiteit Nijmegen op haar naam geschreven. Met 680 punten bleef ze het team van het Driestar College uit Gouda, dat 670 punten scoorde, net voor. Beide teams wonnen met deze prestatie een reis naar Athene. De derde prijs, een weekend Koblenz, was voor het team van het Praedinius Gymnasium uit Groningen. Zij haalden 660 punten. Totaal puzzelden 112 teams op de estafetteopgaven in de ochtend en de *sum of us*-opgave (dit jaar over geodesie en cartografie) in de middag. Op de website van het toernooi vindt u de volledige uitslag, de estafette- en de *sum of us*-opgaven en uitwerkingen, alsmede veel foto's.
Bron: www.ru.nl/wiskundetoernooi

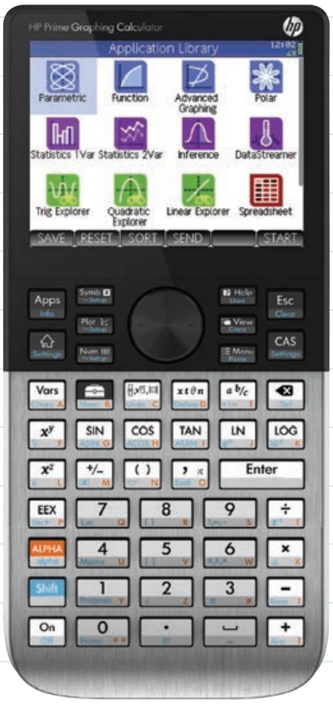
Blinde mensen gebruiken extra hersendeel bij wiskunde

Mensen die vanaf hun geboorte al blind zijn, gebruiken bij het oplossen van wiskundige opdrachten een extra hersendeel, de zogenoemde visuele cortex. Mensen die wel kunnen zien, gebruiken dit deel alleen bij het verwerken van visuele informatie en niet bij het rekenen. Onderzoekers van de Johns Hopkins University in Baltimore kwamen tot deze conclusie door 37 proefpersonen rekensommen te laten maken in een hersenscanner. De helft van deze mensen was al vanaf hun geboorte blind, de andere helft kreeg een blinddoek voor. Uit het onderzoek bleek dat allen gebruik maakten van de zogenoemde *sulcus intraparietalis*, een gebiedje in de grote hersenen. Bij de blinde deelnemers was ook het visuele cortex actief. In het dagelijks leven maken blinde mensen nooit gebruik van dit hersengebied en lijkt het bij hen een nieuwe taak, het rekenwerk, te krijgen. Overigens is het niet waarschijnlijk dat blinden voordeel hebben van dit extra hersendeel: de blinde deelnemers presteerden niet beter tijdens het onderzoek dan de andere proefpersonen.
Bron: www.nu.nl

Rectificatie

In 'Wis en waarachtig' van *Euclides* 92-1 is in stap 2 van het bewijs van de stelling van Pythagoras de een na laatste zin onvolledig. De zin had moeten luiden:
'De oorspronkelijke driehoek en de blauwe driehoek zijn gelijkvormig, dus $n : m = y : x$ en $b : n = a : y$'.





New Body & New Brain

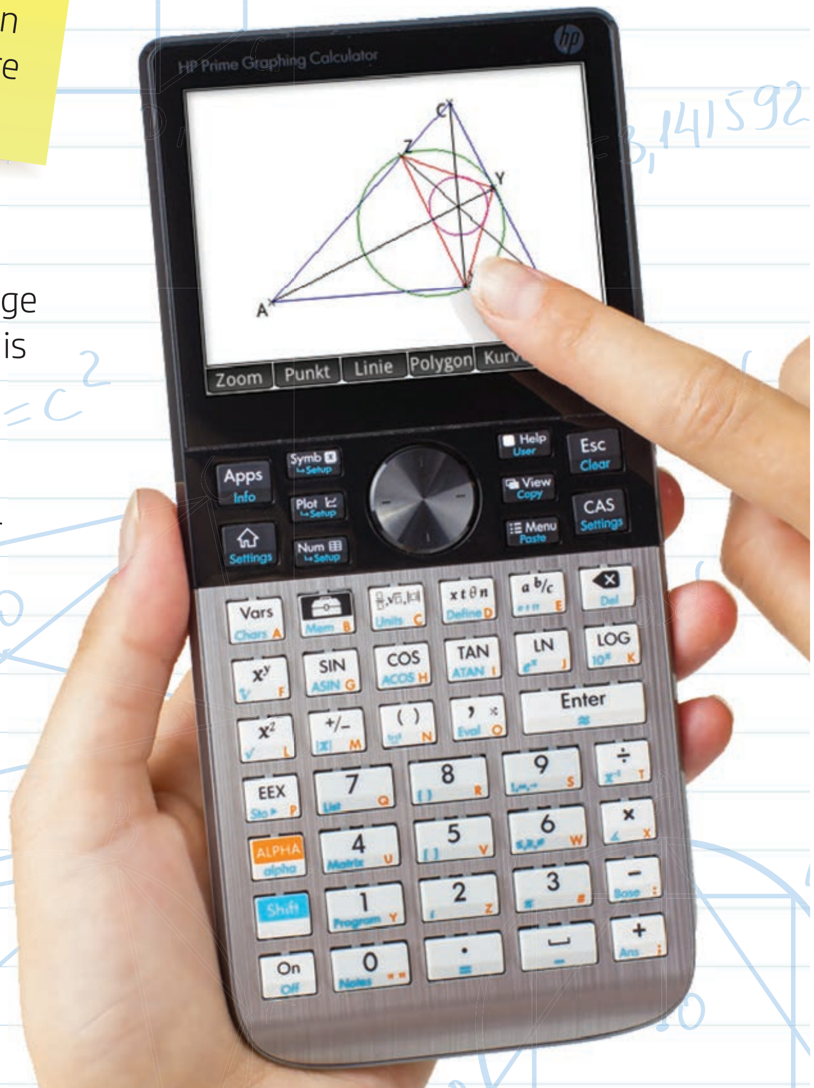
HP Prime

Wilt u meer weten over de krachtigste rekenmachine voor uw leerlingen?

Online support voor Noordhoff en Malmberg beschikbaar!

En voor een vergelijkbare prijs!

- HP Prime; een krachtige grafische rekenmachine met meer rekenkracht en geheugen dan welke andere machine dan ook.
- Nieuwe consistente menustructuur met krachtige educatieve applicaties op een touchscreen: het is tenslotte 2016.
- Examenmode op de Prime betekent 1 knop indrukken. Binnen een paar tellen een examenlokaal in de juiste CvTE examenstand.
- HP Prime wordt altijd geleverd inclusief gratis emulator (dus ook voor uw leerlingen)!



Voor meer informatie en ondersteuningsmaterialen voor in de klas gaat u naar:

www.hp-prime.nl

Voor een docentenworkshop, demo-units of een schoolofferte neemt u contact op met **info@hp-prime.nl**

BERICHTEN UIT HET VMBO

Ans van der Ark
Melanie Steentjes

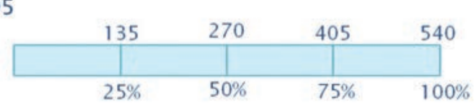
MET PROCENTEN REKENEN: HOE GAAT DAT BIJ WISKUNDE EN ECONOMIE?

Bij de vmbo- en onderbouwconferentie in Utrecht van januari 2016 gaf Ans van der Ark een workshop over verhoudingstabellen en rekenen met procenten in het vmbo. Ze vergeleek daarin de methode die we bij wiskunde gebruiken met de manier die bij economie wordt gebruikt en kwam tot een schokkende conclusie. Melanie Steentjes geeft een verslag.

Basisschool

Op de basisschool maakt een leerling al kennis met rekenen met procenten. Vaak wordt een en ander daar aangeleerd met bijvoorbeeld de procentenstrook, zie figuur 1

Bereken 75% van 540
- de helft van 540 is 270,
- een kwart is 135,
- dus 75% is 405



figuur 1 Procentenstrook op de basisschool

Al op de basisschool wordt de overstap gemaakt naar de verhoudingstabel. Dan wordt de volgorde losgelaten, maar het idee is hetzelfde als bij de procentenstrook, zie figuur 2.

Volgorde losgelaten

100%	50%	25%	75%
540	270	135	405

figuur 2 Verhoudingstabel op de basisschool

Leerlingen op de basisschool leren al het principe dat ze bij een verhoudingstabel onder en boven hetzelfde moeten doen: boven delen door 2, betekent beneden ook delen door 2.

Wiskunde

Bij wiskunde wordt in leerjaar 1 van het voortgezet onderwijs de verhoudingstabel wederom geïntroduceerd. Bij *Getal & Ruimte* niet direct met procenten, maar daar wordt de verhoudingstabel bijvoorbeeld gebruikt om de prijs per stuk te berekenen of te berekenen hoeveel flessen er in een bepaald aantal kratten zitten, zie figuur 3.

Verhoudingstabel

De tabel hieronder is een verhoudingstabel.

KRATTEN FRISDRANK

		× 2	× 5	× 10	: 2	: 10
aantal kratten	1	2	10	100	50	5
aantal flessen	12	24	120	1200	600	60
		× 2	× 5	× 10	: 2	: 10

In een verhoudingstabel kun je:
- boven en onder met hetzelfde getal vermenigvuldigen.
- boven en onder door hetzelfde getal delen.

figuur 3 Verhoudingstabel uit *Getal & Ruimte*, leerjaar 1, dl. 1, vmbo kgt (10e editie)

Later in leerjaar 1 worden ook de procenten erbij betrokken. Er wordt uitgelegd hoe je een percentage naar een aantal kunt omrekenen en omgekeerd en ook leren leerlingen hoe ze de nieuwe prijs kunnen berekenen als bijvoorbeeld het kortingspercentage is gegeven. Dit alles gebeurt aan de hand van de verhoudingstabel. Zie bijvoorbeeld figuur 4.

- Met een verhoudingstabel bereken je de nieuwe prijs.
- Op een laptop van € 599 krijg je 24% korting.
  Het percentage van de nieuwe prijs is dan
  100% – 24% = 76%.
  De nieuwe prijs is
  599 : 100 × 76 = 455,24.
  De laptop kost nu € 455,24.

		: 100	× 76
procenten	100	1	76
aantal	599		?
		: 100	× 76

figuur 4 Verhoudingstabel uit *Getal & Ruimte*, leerjaar 1, dl. 2, vmbo kgt (10e editie)

Er lijkt dus best een mooie doorlopende leerlijn te zijn tussen de basisschool en het voortgezet onderwijs bij het rekenen met procenten. Er wordt aangesloten bij wat leerlingen op de basisschool hebben gehad. Aanwezige kennis wordt herhaald en er wordt op voortgebouwd.

Economie

Hoe zit dat dan bij economie? Ook daar wordt veel gerekend met procenten. Hoe krijgen leerlingen het daar aangeboden? Ans heeft zich verdiept in de methode *Pincode*. Bij de 'eerste' kennismaking met procenten voor leerlingen lijkt het erop dat de verhoudingstabel daar niet wordt gebruikt. Een leerling krijgt in plaats daarvan een formule aangeboden waarmee gewerkt moet worden. Zie figuur 5.

Rente over spaargeld wordt berekend in procenten. Het woord procent betekent: per honderd. Krijg je een rentepercentage van 4%, dan krijg je voor elke € 100 een bedrag van € 4 aan rente. Bij € 240 is de rente als volgt.

Formule	$\frac{\text{Bedrag}}{100} \times \text{percentage} = \text{rente}$
Voorbeeld	$\frac{€\ 240}{100} \times 4 = €\ 9{,}60$

figuur 5 Formule in *Pincode*, onderbouw vmbo kgt (5e editie)

Maar wat heb je aan deze formule als je niet de rente in euro wilt uitrekenen, maar juist het rentepercentage als het aantal euro is gegeven? Van een leerling op het vmbo kun je niet verwachten dat hij deze formule dan zo herschrijft dat het rentepercentage uitgerekend kan worden bij een gegeven aantal euro's. Dus wordt voor deze 'andere' situatie weer een nieuwe formule gegeven, zie figuur 6.

Tom heeft ook een spaarrekening. De laatste keer heeft hij € 14,70 rente gekregen. Hij is wel benieuwd hoe hoog zijn rentepercentage is. Hij had € 420 op zijn rekening staan. Om uit te rekenen hoe hoog het rentepercentage van Tom is, doe je het volgende.

- **Deel het rentebedrag door het totale spaarbedrag.**
- **Vermenigvuldig het daarna met 100%.**

Formule	$\frac{\text{rentebedrag}}{\text{spaarbedrag}} \times 100\% = \text{rentepercentage}$
Voorbeeld	$\frac{€\ 14{,}70}{420} \times 100\% = 0{,}035 \times 100\% = 3{,}5\%$ De spaarrente op Toms rekening is dus 3,5%.

figuur 6 Formule in *Pincode,* onderbouw vmbo kgt (5e editie)

Natuurlijk zijn beide formules in elkaar te herschrijven, maar de link wordt niet gelegd. Het lijkt voor de leerling echt een andere situatie te zijn waarbij hij een andere formule uit zijn hoge hoed moet toveren.
Er zijn natuurlijk nog veel meer verschillende situaties te bedenken waarbij gerekend moet worden met procenten. Denk maar aan korting of rekenen met btw. Voor al deze situaties wordt een verschillende formule gegeven. Bij economie wordt ook gerekend met vreemde valuta. De verhoudingstabel is ook bij dit onderwerp een krachtig hulpmiddel om in te zetten. Ook hier echter worden formules gegeven bij verschillende situaties.
Een en ander resulteert in een samenvatting waarin twaalf verschillende situaties gegeven worden met een aanpak in formulevorm om het probleem op te lossen. Al deze twaalf verschillende situaties hebben een gemeenschappelijke factor: het zijn allemaal problemen met verhoudingen. Bij al deze twaalf situaties kan de verhoudingstabel gebruikt worden om tot een oplossing te komen. Helaas gebeurt dat niet. Dat deze verschillende situaties iets gemeenschappelijks hebben zal de gemiddelde leerling ontgaan.
En in hoeverre wordt de link gelegd met wiskunde? Begrijpt een leerling dat rekenen met procenten bij economie en wiskunde eigenlijk hetzelfde is? Door de totaal verschillende aanpak zou het zo kunnen zijn dat een leerling het verband helemaal niet ziet. En dat is een grote gemiste kans.

Ans heeft overleg gehad met de docenten economie op haar school. Dat heeft erin geresulteerd dat de docenten economie nu ook de verhoudingstabel aanbieden als manier om met procenten te rekenen. Een volgende stap zou zijn om de methodeschrijvers van *Pincode* aan te schrijven.
Weet u wat er bij u op school in de les economie gebeurt?

Over de auteurs

Ans van der Ark is docente wiskunde aan het Maris College Houtrust in Den Haag (vmbo)
E-mailadres: *a.vanderark@mariscollege.nl*
Melanie Steentjes is docente wiskunde aan het Hilfertsheem in Hilversum (vmbo) en werkt daarnaast bij Cito, Arnhem E-mailadres: *melanie.steentjes@cito.nl*

WISKUNDE D ONLINE

Johan Gademan
Jos Tolboom
Evert van de Vrie

In maart 2016 las u over de pilot Wiskunde D Online voor 4 vwo. De pilot was zo succesvol dat we met ingang van het schooljaar 2016-2017 zijn gestart met een permanent programma Wiskunde D Online voor 4, 5 en 6 vwo. In dit artikel schetsen Johan Gademan, Jos Tolboom en Evert van de Vrie de opzet van dit schooljaar en de plannen voor de volgende schooljaren.

Introductie

Wiskunde D heeft een bijzondere status. Ooit is het ingevoerd ter compensatie van de urenreductie bij Wiskunde B die in 2007 plaatsvond. Maar, in tegenstelling tot Wiskunde A en B, behoort het voor geen enkele vervolgopleiding tot de toelatingseisen. Dit maakt het tot speelbal van allerlei krachten en op veel scholen wordt het vak zelfs niet (meer) gegeven. Dat is jammer voor belangstellende leerlingen, de gemotiveerde docenten, en het extra wiskundeniveau dat het oplevert. In dit artikel bespreken we kort welke bijdrage Wiskunde D Online levert om wiskunde D op scholen met kleine groepen leerlingen (weer) mogelijk te maken. Wiskunde D Online is dus bedoeld voor die scholen waar er eigenlijk te weinig leerlingen zijn om het (financieel) verantwoord aan te kunnen bieden. Om een beeld te geven van het landelijk aantal wiskunde D-leerlingen: vwo 2757 (2010: 2744) en havo 904 (2010: 1301). Zeker bij havo wiskunde D een zorgelijke ontwikkeling.

Pilotjaar 2015-2016

Wiskunde D Online is gestart in augustus 2015. Deelname was mogelijk voor scholen waar jaarlijks hooguit tien leerlingen starten met Wiskunde D. Immers, als er meer leerlingen zijn, dan is het beter dat de school ervoor kiest het vak via de gewone lessen te organiseren. De deelnemende leerlingen doen Wiskunde D vooral in zelfstudie met online ondersteuning. Voor Wiskunde D Online is er een digitale leeromgeving (www.wiskundedonline.nl). Hierop is de leerstof opgesplitst in een aantal blokken van ieder vier weken. Iedere week bekijkt de leerling een videoles, bestudeert hij de leerteksten en maakt de daarbij horende opgaven. Maar misschien wel het belangrijkste is dat de leerling iedere week huiswerk maakt en dat opstuurt. Het huiswerk wordt nagekeken door studentassistenten op de vaksteunpunten aan de universiteiten, en de leerling krijgt terugkoppeling op zijn gemaakte werk. Het huiswerk staat ook op de digitale leeromgeving, maar is alleen zichtbaar voor deelnemende leerlingen. Na afloop van een blok moet er een toets gemaakt worden. Dat gebeurt gewoon op school, en wordt georganiseerd door een leraar van de school. Immers, de school en de leraar blijven verantwoordelijk voor de beoordeling.

Halverwege het schooljaar hebben we studenten en docenten geënquêteerd. De resultaten zijn kort samengevat:

- Docenten willen vrijwel unaniem doorgaan op vwo; voor havo is er minder belangstelling.
- Het werk van de studentassistenten wordt erg gewaardeerd.
- Leerlingen zijn minder enthousiast; er zijn afhakers, er zijn klachten over het gebruikte lesmateriaal en over de kwaliteit van de videolessen. Ze zijn positief kritisch.

Vervolgens is in januari 2016 besloten om met Wiskunde D Online door te gaan. Deze beslissing was op dat moment nodig, omdat het keuzeproces op de scholen in 3 vwo al liep. De balans opmakend in cijfers voor het pilotjaar: er deden 42 scholen mee, die 256 leerlingen aangemeld hebben. Uiteindelijk zijn er 167 vwo-leerlingen gestart en hebben 69 leerlingen het afgemaakt. Vrijwel alle deelnemers hadden wiskunde D als extra vak en het totale vakkenpakket was voor menig leerling te zwaar. Daarnaast bleek de zelfstudie als onderwijsvorm toch ook voor een aantal leerlingen ongewoon en veroorzaakte dit afhakers. Leerlingen die hebben deelgenomen hebben meer en diepgaandere kennis en vaardigheden van de wiskunde vergaard. Ook hebben ze ervaren wat het is om meer in zelfstudie aan de slag te moeten en gemerkt dat het discipline en doorzettingsvermogen vereist. Voor leerlingen die tot dan toe redelijk makkelijk het onderwijs konden volgen, was dit een nieuwe uitdaging. Een uitdaging die uitermate relevant is als voorbereiding op een vervolgstudie in het hoger onderwijs.

figuur 1 schermafbeelding van een les



Wiskunde D Online 2016-2017

De opzet hebben we voor dit schooljaar nauwelijks aangepast. Het grootste verschil zit in het feit dat scholen 150 euro per leerling per jaar moeten betalen. Inhoudelijk hebben we alleen twee blokken verwisseld. De indeling kunt u bekijken op *www.wiskundedonline.nl*. De ervaringen in het pilotjaar hebben wel geleid tot bijstellingen op de scholen om de keuze voor wiskunde D en de zelfstudie anders voor te spiegelen en te begeleiden. Wat de vaksteunpunten betreft, Amsterdam stopte en Eindhoven, Nijmegen en Utrecht gingen meedoen, naast Groningen, Enschede en Delft/Leiden. De begeleiding kunnen we dit jaar verdelen over zes vaksteunpunten. De helft van de inkomsten gaat naar deze vaksteunpunten. Voor de rest wordt het geld gebruikt voor het ontwikkelen en onderhouden van de leeromgeving en de videolessen. Het aantal deelnemers is gestegen. Dit schooljaar zijn 51 scholen gestart met 319 leerlingen. We zijn er voor scholen met kleine groepjes wiskunde D. Liever hebben we dat wiskunde D aan een grote groep leerlingen gegeven wordt op de school zelf door de eigen docent. Hier werden we dus blij van: een school meldde ons enthousiast dat ze dit schooljaar niet meer mee zouden doen in 4 vwo met Wiskunde D Online. De schoolleiding had het voorstel goedgekeurd om weer reguliere lessen in klas 4 vwo te geven. Er was een groep van circa twintig leerlingen om mee te gaan werken.
We zijn opvallend vaak benaderd door ouders van leerlingen met het verzoek om Wiskunde D Online te mogen volgen. Onze eerste reactie bestond in een doorverwijzing naar hun school. In een enkel geval leidde dat niet tot een oplossing. In die gevallen bood de Open Universiteit uitkomst en konden we de betreffende leerling toch helpen.

Initiatieven

We voelen ons gesteund door alle reacties en ontwikkelingen, de steun van PWN en NVvW, de medewerking van vaksteunpunten en de expertise van de Open Universiteit. Daarom staan er nieuwe initiatieven op stapel voor het schooljaar 2017-2018:

– Stichting Wiskunde D Online. Allereerst is er een Stichting Wiskunde D Online in oprichting waarbij docenten aan het roer komen te staan die het beleid uit gaan zetten, de inhoudelijke keuzes gaan maken en de financiën gaan beheren. Hierbij heeft de NVvW haar medewerking toegezegd en daar zijn we enorm blij mee. Naar verwachting is de oprichting van de stichting in december 2016 met drie enthousiaste docenten als dagelijks bestuur.
– Havo. We gaan ook een start maken met havo wiskunde D per 1 augustus 2017. Fontys Hogescholen, NHL Leeuwarden en Hogeschool Utrecht hebben hun medewerking toegezegd. We roepen dus scholen op om komend schooljaar weer wiskunde D aan te gaan bieden in 4 havo. Als het gaat om een klein aantal leerlingen, dan is deelname aan Wiskunde D Online een optie. Heeft u belangstelling? Op wiskundedonline.nl staat een formulier waarmee u uw interesse voor havo kenbaar kunt maken.

Over de auteurs

Johan Gademan (SLO), Jos Tolboom (SLO) en Evert van de Vrie (OU) vormen de projectleiding van Wiskunde D online. E-mailadres: *info@johangademan.nl*

MEDEDELING

PROMOTIE KEES HOOGLAND

Op 8 november promoveerde Kees Hoogland (oud-hoofdredacteur van *Euclides*) op het proefschrift *Images of Numeracy*. Voor zijn promotie heeft Kees onderzocht of het vervangen van beschrijvende toetsvragen door meer beeldende vragen een beter resultaat geeft. De eindconclusie is dat er een lichte verbetering is vast te stellen.



De passie van Kees voor gecijferdheid is ons bekend en meer aandacht hiervoor in het onderwijs is zeker gewenst. We leven in onzekere tijden waarin feiten het vaak afleggen tegen meningen. Zorgen dat leerlingen in staat zijn om te bepalen of gebruikte cijfers hout snijden is daarom van het allergrootste belang. De passie van Kees moet ook onze passie zijn. Praat met je leerlingen over getallen en cijfers. Het gaat niet om de sommetjes, maar vooral om de wereld die erachter ligt. Laat ze nadenken. We feliciteren Kees hartelijk en vragen hem ons, met het van hem bekende enthousiasme, te blijven voorzien van voorbeelden en commentaar over gecijferdheid.

Henk Rozenhart

GETUIGEN

WISKUNDIG TIJDSCHRIFT

Danny Beckers

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee over het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.

Studeren in de avonduren

Het beroep van wiskundedocent ontstond in Nederland met de oprichting van de hbs (1863). Ook daarvoor waren er natuurlijk mensen die wiskunde doceerden, maar er bestond geen gesanctioneerde opleiding en er was geen landelijk geaccepteerd examen. Het idee van de wetgever in 1863 was om de docenten een brede academische basis te geven. In de praktijk bleek dit programma veel te ambitieus. Wiskundedocenten ontleenden hun bevoegdheid vaak aan één of twee van de akten voor deelbevoegdheden uit paragraaf K van de wet. Die akten kwamen al snel, naar hun paragraafnummers, bekend onder de namen K-I en K-V (de I en de V staan hier voor de romeinse cijfers 1 en 5). De staatsexamens werden jaarlijks afgenomen en de groep studerenden voor deze akten nam in de decennia na 1870 snel toe. Die (zelf) studie vond meestal plaats in de avonduren.



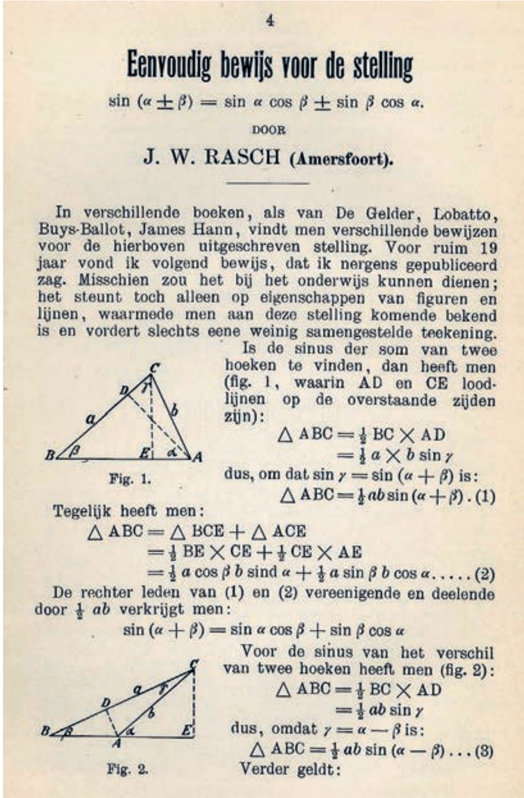
figuur 1 *Wiskundig Tijdschrift* jaargang 1 (1904-1905)

Wiskundig Genootschap

Er bestonden diverse wiskundetijdschriften in Nederland in die tijd. Zo was er *De Vriend der Wiskunde*, dat zich vooral richtte op leraren van de lagere school, die studeerden voor de akte wiskunde lager onderwijs. Daarnaast publiceerde het Wiskundig Genootschap een aantal tijdschriften. De *Wiskundige Opgaven* die het Wiskundig Genootschap uitgaf, bestond uit enkel opgaven en uitwerkingen. Het *Nieuw Archief voor Wiskunde*, is de oudste van de bestaande Nederlandse wiskundetijdschriften. Het is opgericht in 1875 met als expliciet doel om plaats te bieden aan artikelen waarin onderzoeksresultaten konden worden gepubliceerd. De redactie had een serieus imago opgebouwd. Tot slot was er het *Revue Sémestrielle des publications mathématiques*, dat sinds 1893 werd verzorgd door het genootschap. Het was een referaattijdschrift, waarin alle wiskundige publicaties ter wereld werden besproken en dat wereldwijd werd verspreid.

Verwijdering wetenschappers en onderwijzers

F.J. Vaes, leraar wiskunde aan een hbs in Rotterdam, kwam met het voorstel om een tijdschrift op te richten voor wiskundeleraren. Vaes was één van de docenten die door zelfstudie zijn akte had gehaald. Hij kende de worsteling van de studerende voor de K-akte en meende dat een tijdschrift hierin verbetering kon brengen. Het Wiskundig Genootschap was volgens hem de aangewezen partij om dit te helpen realiseren, dus hij bracht zijn voorstel in tijdens de jaarvergadering van 1903.
Het Wiskundig Genootschap werd op dat moment geleid door een groep ambitieuze wetenschappers die zich ook internationaal trachtten te profileren. Met het *Nieuw Archief* en het *Revue* verzorgde het genootschap twee wetenschappelijke tijdschriften. Die slokten het leeuwendeel van het jaarlijkse budget op. Daarnaast hadden de academische genootschapsleden er hun handen vol aan. Men zat dus niet te wachten op de publicatie van nog een tijdschrift. Toen Vaes zijn voorstel ter sprake bracht voelde het bestuur zich overvallen en reageerde bits. 'Alle inbreng diende tevoren schriftelijk bij de voorzitter bekend te zijn', meldde de voorzitter. In eerste instantie suggereerde het bestuur dat de kwestie op papier kon worden ingediend en dan bij de volgende jaarvergadering kon worden besproken. Daarmee nam Vaes echter geen genoegen. Het draaide erop uit dat een speciale vergadering zou worden ingelast om de suggestie te bespreken. Die vergadering vond plaats op 19 december 1903. Het slot van de notulen luidde: 'Uit de bespreking blijkt dat de meeste leden van het bestuur niet wenschen een nieuw



4

Eenvoudig bewijs voor de stelling

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha.$

DOOR

J. W. RASCH (Amersfoort).

In verschillende boeken, als van De Gelder, Lobatto, Buys-Ballot, James Hann, vindt men verschillende bewijzen voor de hierboven uitgeschreven stelling. Voor ruim 19 jaar vond ik volgend bewijs, dat ik nergens gepubliceerd zag. Misschien zou het bij het onderwijs kunnen dienen; het steunt toch alleen op eigenschappen van figuren en lijnen, waarmede men aan deze stelling komende bekend is en vordert slechts eene weinig samengestelde teekening.

Is de sinus der som van twee hoeken te vinden, dan heeft men (fig. 1, waarin AD en CE loodlijnen op de overstaande zijden zijn):

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} BC \times AD$$
$$= \tfrac{1}{2} a \times b \sin\gamma$$

dus, om dat $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$ is:

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} ab \sin(\alpha + \beta) \;.\; (1)$$

Fig. 1.

Tegelijk heeft men:

$$\triangle ABC = \triangle BCE + \triangle ACE$$
$$= \tfrac{1}{2} BE \times CE + \tfrac{1}{2} CE \times AE$$
$$= \tfrac{1}{2} a \cos\beta\, b \text{ sind } \alpha + \tfrac{1}{2} a \sin\beta\, b \cos\alpha \ldots\ldots (2)$$

De rechter leden van (1) en (2) vereenigende en deelende door $\frac{1}{2}ab$ verkrijgt men:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$$

Voor de sinus van het verschil van twee hoeken heeft men (fig. 2):

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} BC \times AD$$
$$= \tfrac{1}{2} ab \sin\gamma$$

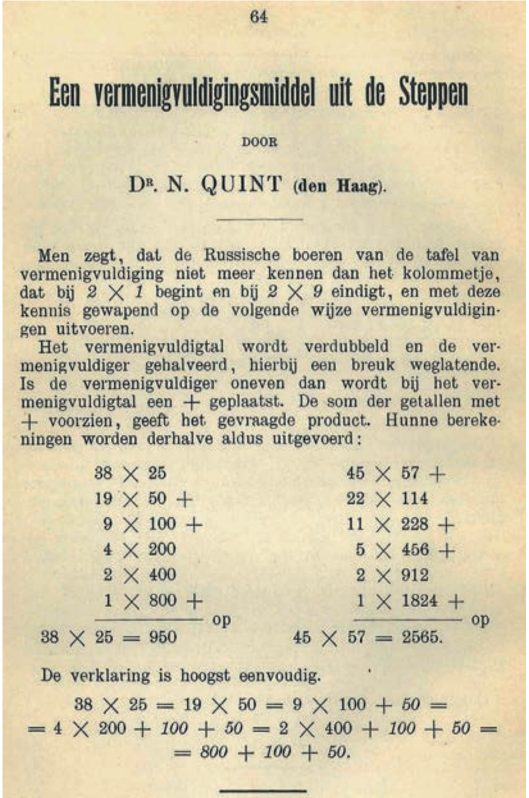
dus, omdat $\gamma = \alpha - \beta$ is:

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} ab \sin(\alpha - \beta) \ldots (3)$$

Fig. 2.

Verder geldt:

figuur 2 *Wiskundig Tijdschrift* jaargang 5 (1908-1909)



64

Een vermenigvuldigingsmiddel uit de Steppen

DOOR

Dr. N. QUINT (den Haag).

Men zegt, dat de Russische boeren van de tafel van vermenigvuldiging niet meer kennen dan het kolommetje, dat bij *2 × 1* begint en bij *2 × 9* eindigt, en met deze kennis gewapend op de volgende wijze vermenigvuldigingen uitvoeren.

Het vermenigvuldigtal wordt verdubbeld en de vermenigvuldiger gehalveerd, hierbij een breuk weglatende. Is de vermenigvuldiger oneven dan wordt bij het vermenigvuldigtal een + geplaatst. De som der getallen met + voorzien, geeft het gevraagde product. Hunne berekeningen worden derhalve aldus uitgevoerd:

38 × 25	45 × 57 +
19 × 50 +	22 × 114
9 × 100 +	11 × 228 +
4 × 200	5 × 456 +
2 × 400	2 × 912
1 × 800 +	1 × 1824 +
op	op
38 × 25 = 950	45 × 57 = 2565.

De verklaring is hoogst eenvoudig.

$$38 \times 25 = 19 \times 50 = 9 \times 100 + \mathit{50} =$$
$$= 4 \times 200 + \mathit{100} + \mathit{50} = 2 \times 400 + \mathit{100} + \mathit{50} =$$
$$= \mathit{800} + \mathit{100} + \mathit{50}.$$

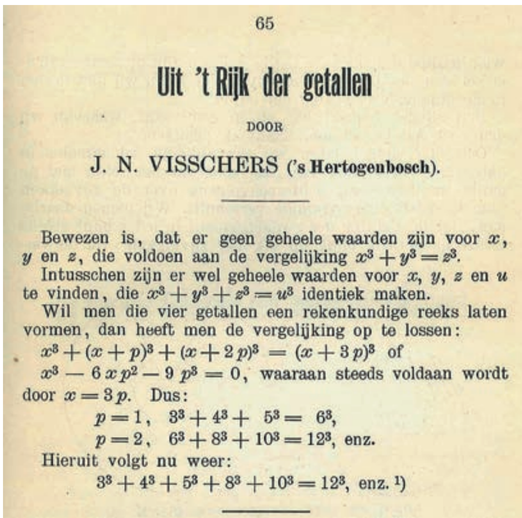
figuur 3 *Wiskundig Tijdschrift* jaargang 5 (1908-1909)

tijdschrift in het leven te roepen op grond daarvan, dat het *Nieuw Archief* beschikbaar is voor ieder die, op welk gebied van wiskunde ook, iets van diergelijke beteekenis heeft medetedeelen, doordat zelfs bij het begin der laatste serie op het inzenden van stukken van eenvoudige aard is aangedrongen. Dat dit geen gevolg heeft gehad, is alleen daaraan te wijten, dat door niemand iets is ingezonden.' De verwijdering tussen wetenschappers en onderwijzers is voelbaar: leraren zenden gewoon geen artikelen in, was de reactie van het bestuur. Het bestuur was zich pijnlijk bewust van het krappe budget. Aan de andere kant was een niet onbelangrijk deel van dat budget juist afkomstig van onderwijzers die lid waren van het genootschap. De bestuursvoorzitter, de aimabele Amsterdamse hoogleraar D.J. Korteweg, zocht zodoende naar een compromis. Het genootschap zou subsidie verlenen en in ruil zouden de leden tegen gereduceerde prijs op het nieuwe tijdschrift mogen intekenen. Daardoor riskeerde het genootschap zelf geen financiële problemen en hadden de onderwijzers toch baat bij hun lidmaatschap van het Wiskundig Genootschap. Mocht de genootschapskas te krap worden om nog langer subsidie te verlenen dan kon te zijner tijd bekeken worden wat de verstandigste actie was.

Een succesvol tijdschrift

Vaes toog onmiddellijk aan het werk. Binnen een paar maanden was het *Wiskundig Tijdschrift* een feit. De eerste jaargang werd uitgegeven in 1904-1905. Het bevatte een lijst van 382 intekenaren, voornamelijk leraren wiskunde aan gymnasia en hbs en een aantal ingenieurs. In de inleiding kon Vaes bogen op een succes. Niet alleen had hij zijn tijdschrift van de grond gekregen, hij was er ook in geslaagd om voldoende kopij te genereren om de eerste jaargang te vullen. In het tijdschrift kon de (aankomende) docent naast examenbesprekingen en discussies met betrekking tot het curriculum, vooral ook wiskundig inhoudelijke artikelen vinden, en wiskundige aardigheden, soms bedoeld als didactische handreiking. Artikelen en intekenaren zouden blijven toestromen. Eerst in de jaren

figuur 4 *Wiskundig Tijdschrift* jaargang 5 (1908-1909)



65

Uit 't Rijk der getallen

DOOR

J. N. VISSCHERS ('s Hertogenbosch).

Bewezen is, dat er geen geheele waarden zijn voor x, y en z, die voldoen aan de vergelijking $x^3 + y^3 = z^3$.

Intusschen zijn er wel geheele waarden voor x, y, z en u te vinden, die $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ identiek maken.

Wil men die vier getallen een rekenkundige reeks laten vormen, dan heeft men de vergelijking op te lossen:

$$x^3 + (x + p)^3 + (x + 2p)^3 = (x + 3p)^3 \text{ of}$$
$$x^3 - 6xp^2 - 9p^3 = 0,$$ waaraan steeds voldaan wordt door $x = 3p$. Dus:

$$p = 1, \quad 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3,$$
$$p = 2, \quad 6^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3, \text{ enz.}$$

Hieruit volgt nu weer:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3, \text{ enz.}$$ [1]

1920 zou het *Wiskundig Tijdschrift*, onder het economisch ongunstige tij en de concurrentie met andere tijdschriften die inmiddels waren opgericht, te gronde gaan.

De totstandkoming van het *Wiskundig Tijdschrift* illustreert dat de wiskundeleraren en de academische roergangers van het Wiskundig Genootschap in 1903 uit elkaar groeiden. Het bestuur was niet zo gecharmeerd van het initiatief en had liever gezien dat Vaes zijn initiatief in het *Nieuw Archief* zou onderbrengen. Dat was toen inmiddels al lang een gepasseerd station. De tijd was rijp voor een organisatie van wiskundeleraren. Die zou er komen met de oprichting van Liwenagel (1921) en Wimecos (1924) – na de oorlog gefuseerd tot de NVvW. Het *Wiskundig Tijdschrift* rest ons nu als papieren getuige van een beroepsgroep die zich enerzijds nog te zeer verbonden voelde met de academische wiskunde om daar afstand van te nemen, maar anderzijds haar eigen besognes had.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

MEDEDELING

IMMC: MODELLEEREVENEMENT

Sinds 2015 bestaat een internationaal modelleerevenement onder de naam IMMC: International Mathematical Modeling Challenge. Daarin werken teams vijf aaneengesloten dagen aan een open realistische opdracht, waarbij zij alle informatiebronnen kunnen raadplegen.
De volledige opgaven van 2015 en 2016, en nog veel meer informatie, kunt u vinden op de site van IMMC: www.immchallenge.org
De Challenge van 2017 staat open van midden maart tot en met de eerste week van mei. Als u een team wilt laten deelnemen, of eerst meer informatie wilt, dan kunt u mailen met Henk van der Kooij (lid van het internationale organisatiecomité). E-mailadres: *henkvanderkooij@gmail.com*

In de volgende *Euclides* volgt een uitgebreider artikel over IMMC.

MEDEDELING

POSTDOC-ONDERZOEK OP UW EIGEN SCHOOL?

Universiteit Utrecht

Bent u gepromoveerd en werkzaam als bèta- en/of techniekdocent (biologie, informatica, natuurkunde, scheikunde, techniek en/of wiskunde) op een mbo- of vo-school? En wilt u bijdragen aan de schoolontwikkeling door het uitvoeren van een toegepast, vakdidactisch wetenschappelijk onderzoek? Dan is een tijdelijke aanstelling als postdoconderzoeker op uw school wellicht een optie.
De call voor nieuwe postdoconderzoeken startend per september 2017 is nu open!

De postdocposities kunnen verworven worden op basis van een onderzoeksplan dat door de docentonderzoekers zelf is opgesteld in samenspraak met de school en een zelf te kiezen begeleider. De aanvraagprocedure verloopt in twee stappen, eerst een vooraanvraag en vervolgens een volledig uitgeschreven onderzoeksplan. De aanvragen worden op kwaliteit beoordeeld door een externe reviewcommissie. Kansrijke voorstellen worden gehonoreerd.
Het project Postdoc-VO maakt deel uit van ‘De Lerarenagenda 2015-2020 - De leraar maakt het verschil’, een toekomstagenda ontwikkeld samen met leraren.
Een belangrijk thema in de agenda is het bieden van meer mogelijkheden tot groei en ontwikkeling voor leraren binnen en buiten het vakgebied. Daarnaast wordt verwacht dat het creëren van postdocposities op scholen positieve effecten heeft op de onderzoekscultuur op scholen en de samenwerking tussen universiteiten en scholen.
Het project Postdoc-VO wordt financieel ondersteund door het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap (OCW). Het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht treedt op als penvoerder.
Meer informatie: www.postdoc-vo.nl

UITDAGENDE PROBLEMEN

Jacques Jansen

MET UW KLAS LEERMIDDELEN MAKEN?

Leermiddelen zoeken of maken, liefst met leerlingen samen, en gebruiken bij het exact oplossen van bijvoorbeeld de vierkantsvergelijking $x^2 = x + 1$ en de kubische vergelijking $x^3 = x + 1$. Jacques Jansen doet een beroep op meetkundig getinte aanpakken uit het verre verleden. En waar kent u deze vergelijkingen toch van?


OESO: nergens in de wereld zijn klassen zo onordelijk en rumoerig

Nederlandse scholier ongemotiveerd

figuur 1 Uit *de Volkskrant*, 26 mei 2016

De kop op de voorpagina van *de Volkskrant*, springt eruit en prikkelt. Dat was het slechte nieuws uit het OESO-rapport maar nu het goede nieuws: 'per saldo is het onderwijs in Nederland behoorlijk goed'. De kern van het rapport is dat het 'motivatiegebrek' van veel Nederlandse leerlingen voortvloeit uit een gemis aan uitdagingen. Toch zie ik op de facebookgroep Leraar Wiskunde dat heel wat collega's met elkaar van gedachten wisselen om hun lessen uitdagender te maken. De gesprekken gaan niet alleen over allerlei video's en leuke weetjes maar ook over leermiddelen. 'Waar kun je die leermiddelen bestellen?' is een veel gestelde vraag en 'leermiddelen zijn duur' is een opvallende opmerking. Kunnen we de lessen wat actiever maken door samen met de leerlingen leermiddelen in te zetten of zo nodig in overleg met andere disciplines zoals tekenen, handvaardigheid of techniek ze zelf produceren? Met restjes hout en gebruik van bijvoorbeeld plakkaatverf is er veel mogelijk. Of we gaan aan de slag met materialen die we in huis of gewoon bij ons hebben. Om te beginnen oude agenda's en pasjes.

Gulden snede

U heeft vast nog wel de bekende schoolagenda's van die grote uitgever uit het noorden des lands. In figuur 2 zijn twee van die versleten agenda's afgebeeld.

figuur 2



Er is iets bijzonders aan de hand. De afbeelding in figuur 2 spreekt voor zich. Uw leerlingen hebben in hun portemonnee vaak al diverse pasjes. De meeste zijn even groot en hebben een rechthoekige vorm. Zie figuur 3.

figuur 3



Ook deze twee even grote pasjes geven het gulden snede getal weer. Het verlengde van de diagonaal *AC* van het liggend pasje gaat door het hoekpunt *E* rechts boven van het staande pasje. Lengte en breedte van het pasje verschillen een factor x die groter is dan 1. De breedte *BC* van het liggende pasje stellen we voor het gemak gelijk aan 1. De lengte *AB* is dan gelijk aan x.
Er geldt nu met verhoudingen in gelijkvormige driehoeken dat $\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{x+1}$ en dat geeft na omwerken: $x^2 = x + 1$.

Babylonische aanpak

We kunnen de vierkantsvergelijking vervangen door een product van twee getallen dat een vaste waarde moet hebben: $x(x - 1) = 1$. Het gaat dus om twee getallen x en y waarvan het product 1 is en het verschil ook al 1. x is het grootste van die twee getallen en ook groter dan 1. Het gemiddelde van die twee getallen noemen we m. Uitgedrukt in m: $x = m + \frac{1}{2}$ en $y = m - \frac{1}{2}$. Er geldt: product is $(m + \frac{1}{2})(m - \frac{1}{2}) = m^2 - \frac{1}{4} = 1$.
$m^2 = \frac{5}{4}$ dus $m = \frac{1}{2}\sqrt{5}$. x is het gulden snede getal φ en de waarde is $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \approx 1{,}618$. Maar kenden de Babyloniërs de 'merkwaardige producten'? Volgens Van der Waerden zijn er sterke aanwijzingen dat zij daarvan op de hoogte waren.[1] Maar hoe hebben zij deze afgeleid? Waarschijnlijk op de manier zoals in het kader in figuur 4 (volgende blz.) is afgebeeld.

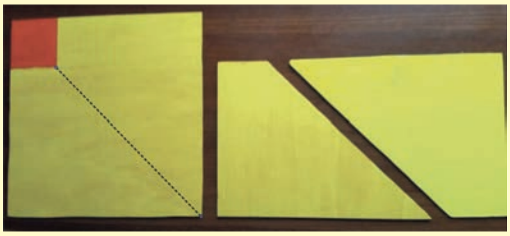
Sangaku

figuur 4



We zorgen voor een gele vierkante plaat met in een hoek een rood vierkantje. Zie figuur 4. De lengte van de zijde van de grote gele plaat noemen we a en die van het rode vierkantje noemen we b. U legt die plaat midden in de klas. De leerlingen zullen snel zien - u presenteert het als een Sangaku - dat $a^2 - b^2 = (a - b)\cdot(a + b)$. Of ze leiden juist die andere betrekking af: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ als u de zijden anders benoemt. U kunt ook langs de diagonaal gaan zagen (of uw leerlingen aan het werk zetten met schaar en gekleurd karton) zodat de plaat in twee trapeziumvormige stukken uiteenvalt. Zie figuur 5.

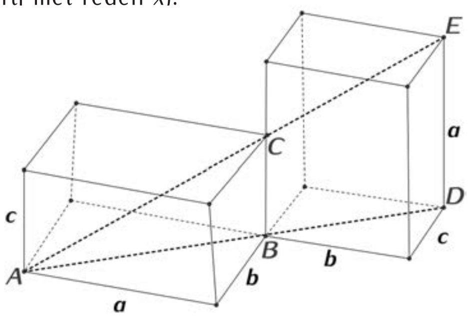
figuur 5



Kubische vergelijking $x^3 = x + 1$

De twee blokken in figuur 6 hebben dezelfde afmetingen a, b en c. Er is een liggend en een staand blok afgebeeld die in deze opstelling een bijzondere eigenschap hebben. De hoofddiagonaal AC van het liggende blok gaat bij verlenging door een bovenhoek rechtsachter (punt E) van het staande blok. b en c zijn zo gekozen dat b een factor x scheelt van c. Kiezen we voor c een eenheidslengte dan geldt: $c = 1$ en $b = x$. a wordt zo gekozen dat die weer een factor x scheelt met b. Dus geldt: $a = x \cdot b = x \cdot x = x^2$. De afmetingen van zo'n blok vormen het beginstuk van een rij met een exponentieel verband (meetkundige rij met reden x).[2]

figuur 6



Er geldt nu in driehoek ADE: $\frac{BC}{ED} = \frac{AB}{AD} = \frac{a}{a+b}$ (zie grondvlak). $BC = 1$ en $ED = a$. Dat geeft: $\frac{1}{a} = \frac{a}{a+b}$.

We drukken nu a en b uit in x ($a = x^2$ en $b = x$) en vullen in: $\frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2+x}$. Dat wordt herleid tot: $x^4 = x^2 + x$. Delen door x geeft: $x^3 = x + 1$.

De architect benedictijn Dom Hans van der Laan (1904-1991) heeft deze kubische vergelijking ook afgeleid maar wel op een hele andere manier. Daarvoor moeten we ons verplaatsen in de ziel van deze architect. Frederik van der Blij heeft dat helder beschreven in *Getallen*[3], een *Euclides*-special uit 2012. De oplossing van $x^3 = x + 1$, ook wel *plastische getal* genoemd of *mystieke constante*, paste hij toe in zijn architectuur. Hij gebruikte dat in zijn matenstelsel.[4] Dat leverde sobere, strakke en serene interieurs op. Zie figuur 7.

figuur 7 Interieur van abdij Sint Benedictusberg, Mamelis/Vaals



Hoe lossen we $x^3 = x + 1$ exact op?

Kunnen we er een meetkundige voorstelling bij maken? Jawel, we moeten het getal x^3 dan zien als de inhoud van een of andere kubus. Met die kubus moeten we dan aan de slag gaan. Het begin van het oplossen zou kunnen zijn om de kubus onder te verdelen. We gaan de kubus verzagen. Ribbe x kunnen we laten bestaan uit twee ribben u en v: $x = u + v$. Inhoud x^3 kun je dan vervangen door $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$. We hebben nu twee kleinere kubussen gekregen, een rode kubus met inhoud u^3 en een blauwe kubus met inhoud v^3 met 'nog wat delen'.



figuur 8



figuur 9

Maar wat zou dat 'nog wat delen' kunnen zijn? We rangschikken de kubusjes zoals in figuur 9. We kunnen het bovenaanzicht opvullen met een rechthoek waarvan de afmetingen u en v zijn. Ruimtelijk bekeken gaat het om een balk waarvan de hoogte $u + v$ zal moeten zijn. Zie nu de figuren 10 en 11. We plaatsen die balk (geel geverfd) erbij. We voegen nog twee even grote balken toe.

Eerst aan de rechterkant, zie figuur 11. Tot slot zien we in figuur 12 de derde balk die ervoor zorgt dat de kubus weer geheel compleet wordt.



figuur 10



figuur 11

Algebraïsch bezien:
$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + 3uv\,(u + v) + v^3$
De 'nog wat delen' blijken drie even grote balken te zijn.

figuur 12
Onderdelen geverfd in de Piet Mondriaan kleuren



figuur 13



Er is dus nu een blokkenbouwsel. De rode kubus met ribbe u, de blauwe kubus met ribbe v en drie even grote balken met de afmetingen u, v en $u + v$. De inhoud van dit blokkenbouwsel moet zijn $x + 1$ of $u + v + 1$.
We noteren alles weer in één kleur: $(u + v)^3 = u^3 + 3u \cdot v \cdot (u + v) + v^3 = (u + v) + 1$. u en v zijn afhankelijk van elkaar. We kunnen deze getallen zo kiezen dat $u^3 + v^3 = 1$ en $3uv = 1$. Van de inhouden van de twee kubusjes geldt dat de som gelijk is aan 1 en het product van de inhouden is gelijk aan $\frac{1}{27}$. Immers uit $3uv = 1$ volgt $uv = \frac{1}{3}$.

Dus $(uv)^3 = (\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$. In wezen hebben we het oplossen van deze kubische vergelijking teruggebracht tot een bekend probleem waar de Babyloniërs wel raad mee wisten (eigenlijk een indirecte vierkantsvergelijking): de gemiddelde inhoud van de kubusjes is $\frac{1}{2}$. De afwijking met $\frac{1}{2}$ noemen we d. We volgen nu de Babylonische aanpak en berekenen afwijking d en dan ribben u en v:

$$\begin{cases} u^3 = \frac{1}{2} + d \text{ en } v^3 = \frac{1}{2} - d \\ u^3 \cdot v^3 = \frac{1}{4} - d^2 = \frac{1}{27} \end{cases}$$

$$d^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{27} = \frac{23}{108} \qquad d = \sqrt{\frac{23}{108}}$$

$$u^3 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{108}} \qquad v^3 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{108}}$$

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{108}}} \approx 1{,}324717957$$

En hiermee hebben we het *plastische getal* gevonden. Voor u nog de uitdaging om eventueel met leerlingen te kijken naar vergelijkingen $x^n = x + 1$ waarbij n een natuurlijk getal groter dan 3 is. Waar komen ze vandaan? Kunnen we ze wel exact oplossen?

Tot slot

Wiskundecollega Elizabet Zwetsloot schrijft in haar actie-onderzoek 'Wiskunde leren in vrijheid' over het gedrag van leerlingen op de Democratische School in Eindhoven waar zij werkzaam is. Als zij in de werkplaats - wat een luxe! - leerlingenmateriaal maakt in het bijzijn van leerlingen valt op dat ze geboeid raken, nieuwsgierig worden, vragen gaan stellen en zelf ook een wiskundig model of object willen maken.

Noten

[1] Waarden, B.L. van der (1956). *Erwachende Wissenschaft. Deel 1. Egyptische, Babylonische und Griechische Mathematik. Basel*. Birkhäuser Verlag.
[2] Alsina, C. (2016). *De stelling van Pythagoras. De heilige geometrie van driehoeken*. Kerkdriel: Librero.
[3] Blij, F. van der (2012). Het plastisch getal. *Euclides, 87*(special Getallen).
[4] Laan, H. van der (1997). *De architectonische ruimte. Vijftien lessen over de dispositie van het menselijke verblijf*. Leiden: Brill.

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen. E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

TEGENVOETER

ORDE, TUCHT EN DISCIPLINE

Roland Meijerink

Sinds begin vorig jaar ben ik docent wiskunde op Karamu High School in Hastings, Nieuw-Zeeland. Op deze plek houd ik u op de hoogte van mijn belevenissen aan de andere kant van de wereld.

Een vorige keer vertelde ik dat discipline op scholen in Nieuw-Zeeland hoog in het vaandel staat. Dat begint met het schooluniform, dat vrijwel alle scholen hebben, inclusief de bijbehorende regels voor haardracht, make-up en sieraden. Jongens moeten zich scheren, meisjes mogen hun haar niet los dragen en oorbellen mogen niet te prominent zijn. Als leerlingen op excursie of op de foto gaan, doen ze een blazer van de school aan. De leerlingen in de hoogste klas hebben een iets netter uniform (met een stropdas voor de jongens), maar de eerdergenoemde regels voor haar en sieraden gelden niet.



Naast het uiterlijk draait het bij discipline natuurlijk in belangrijke mate om gedrag. Het is niet ongebruikelijk om (onderbouw)klassen voor de les in een rijtje buiten het lokaal te laten staan en de leerlingen dan één voor één naar binnen te laten. Bij het plaatsnemen in de aula of een brandoefening splitsen leerlingen zich desgevraagd feilloos op in mentorklassen, desnoods op alfabetische volgorde. En tijdens (voor leerlingen saaie) bijeenkomsten waar de rector spreekt of een gast een toespraak houdt zijn ze altijd netjes stil. Waarna ze tijdens mijn les natuurlijk willen bijpraten. Maar niet voordat ze netjes 'dank u wel meneer' hebben gezegd bij het uitdelen van een blad met oefensommen...

> 'NIEUW-ZEELANDERS ZIJN SOWIESO ERG GOED IN HET GEVEN (EN ONTVANGEN) VAN GEMEENDE COMPLIMENTEN.'

Mede omdat onze school op de sociaal-economische ladder slechts een lage middenmotor is, is al dat goede gedrag niet vanzelfsprekend. Leerlingen zijn geen engeltjes, telefoons zijn net zo alomtegenwoordig als in Nederland en als je geen orde houdt, breken ze de tent af. Bij zowel leerlingen als ouders merk je echter meer respect voor docenten en school, en er zijn veel patronen waar leerlingen sinds de lagere school aan gewend zijn. Als personeelslid probeer je daarnaast continu positief gedrag te belonen en de hoge verwachtingen te benadrukken. Nieuw-Zeelanders zijn sowieso erg goed in het geven (en ontvangen) van gemeende complimenten, dat merk je ook vanuit de schoolleiding en tussen personeelsleden onderling.
En natuurlijk vliegt er wel eens een leerling uit de bocht, met een domme opmerking op *social media*, een handgemeen met een andere leerling, vloeken of beledigen van een docent. Indien nodig wordt er streng opgetreden en komen beide ouders op school, wordt de leerling bijvoorbeeld een paar dagen geschorst of op school geïsoleerd, en kunnen er voorwaarden worden gesteld aan de terugkeer van de betreffende leerling. Ten aanzien van drugs is er bij ons *zero-tolerance*: dat betekent in principe altijd dat de leerling een andere school moet gaan zoeken.
Je zou kunnen denken dat die nadruk op discipline ten koste gaat van de ondernemendheid, maar niets is minder waar. Bij ons op school blinken leerlingen vooral uit in muziek, toneel en dans. Daarnaast wordt er veel gesport: ongeveer de helft van de leerlingen speelt in één of meerdere schoolteams. Er zijn veel excursies in de regio, meerdaagse trips naar plaatsen in den lande en grote reizen naar Japan en Europa. Leerlingen ontplooien allerlei activiteiten om zich in te zetten voor het milieu, lokale goede doelen of de school zelf.
Meer lezen? Ga naar www.tegenvoeters.nl of stuur een reactie naar *rmeijerink@karamu.school.nz.*

VASTGEROEST

Ab van der Roest

LES VOORBEREIDEN

結皮

Columnist Ab van der Roest verblijft een jaar in China. Ook daar heeft hij mooie observaties van *wiskunde als menselijke activiteit*. Over de taal bijvoorbeeld: waarin vertalen meer hertalen blijkt te zijn.

Het voorbereiden van mijn lessen is er jaren bij ingeschoten. Druk, druk, druk, en daarom tien minuten voor de les even kijken waar het over moest gaan. De lessen waren niet slecht, denk ik, maar zeker niet goed. Les voorbereiden is vanzelfsprekend belangrijk en het smartbord en een jonge collega zorgden ervoor dat ik mijn lessen weer ging voorbereiden. De jonge collega deed vwo-4 wiskunde A voor de eerste keer en wekelijks namen we met elkaar de stof voor de volgende week door. Ik mocht mijn ervaring doorgeven, maar zij zorgde voor de vernieuwende ideeën. De kwaliteit van de les werd hier beter door, alhoewel de leerlingen dit niet altijd herkenden. Het smartbord, eigenlijk een collega die heel veel doet met het smartbord, gaven me een tweede impuls. De opzet van de les alvast op schijf zetten, zodat er voor de leerlingen een heldere lijn ontstond. Voorbeelden soms al deels gemaakt en dan alleen maar afmaken.
Filmpje alvast klaarzetten en een constructie met behulp van GeoGebra stap voor stap laten zien. Het lesgeven werd leuker, ondanks het feit dat het veel meer tijd kostte. Ik hoop dat de resultaten op termijn ook beter zullen worden.
Nu moet ik mijn les om een andere reden weer goed voorbereiden. Het enige bord dat ik heb is een whiteboard en wat stiften en jonge collega's heb ik hier niet. Er is een andere oorzaak. Hier in China werk ik met Amerikaanse boeken. En dat is een grote uitdaging. De wiskunde is niet anders, maar de notatie soms wel. In Nederland geven we bijvoorbeeld een lijnstuk aan met twee letters als AB, maar nu moet ik $\overline{AB}$ schrijven. Niet zo schokkend.
Wat belangrijk anders is, is dat de methode veel aandacht geeft aan definities. Daardoor wordt de wiskunde formeler. Als voorbeeld de tabel onderaan de pagina. Voor mijn leerlingen in Nederland vanzelfsprekende eigenschappen, maar geen van mijn leerlingen zal waarschijnlijk weten wat de naam van de eigenschap is. Ik noem de naam wel eens, maar ik laat het de leerlingen nooit leren. Is dat nutteloze kennis, of moet ik me daar eens op bezinnen? Ik kan me voorstellen dat het leren van de namen van de eigenschappen helpt bij het onthouden van de eigenschappen. Kortom, niet alleen toepassen, maar ook het theoretisch kader. Een aparte paragraaf aan het einde van het hoofdstuk is *vocabulary*. Hier wordt vaak een schriftelijke overhoring (een quiz) over gegeven.
Een laatste voorbeeld waaruit blijkt dat woorden voor deze methode belangrijk zijn, zijn opgaven die aangegeven worden met *writing in math*. In het begin van het hoofdstuk wordt een voorbeeld gegeven dat gaat over verdubbeling van kortingscoupons. Na behandeling van de tabel en een aantal oefenopgaven volgt een schrijfopdracht: 'Hoe kun je de distributieve eigenschap gebruiken bij het berekenen van kortingen? Je antwoord bevat een voorbeeld van kortingscoupons in een supermarkt, en een kledingwinkel waar alle kleding hetzelfde kortingspercentage heeft.' Hier dus geen rechtstreeks rekenvoorbeeld, maar een toepassing uit de praktijk die beschreven moet worden. Ik denk dat dit goede opgaven zijn om de wiskunde dicht bij de leerling te krijgen. Het is niet alleen iets van de schoolboeken, maar van de dagelijkse praktijk. Bij het voorbereiden van de eerste lessen betrap ik mezelf erop dat ik niet zoveel met woorden doe. Hierover nadenkend, vind ik praten en schrijven met de juiste terminologie wel belangrijk. Misschien dat de leerling dan beter begrijpt wat hij leert en de wiskunde een klein beetje meer wiskunde gaat worden in plaats van sommetjes maken. Ook in China is veel te leren voor wiskundeleraren.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. Dit schooljaar verblijft hij voor een jaar in China en zal hij ons van daaruit berichten.
E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

eigenschappen van de reële getallen		
voor alle reële getallen a, b en c geldt:		
eigenschap	optellen	vermenigvuldiging
commutatief	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
associatief	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
identiteit	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
inverse	$a + (-a) = (-a) + a = 0$	Als $a \neq 0$ dan $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$
distributief	$a(b + c) = ab + ac$ en $(b + c)a = ba + ca$	

DE MACHT VAN ONEINDIG

Jeroen Spandaw

Jeroen Spandaw neemt u mee naar de wonderlijke wereld van oneindige getallen. In die wereld kun je beweringen bewijzen over eindige getallen die in de eindige wereld bewijsbaar onbewijsbaar zijn.

Met mijn nichtje Iris speelde ik ooit het spelletje wie het grootste getal kon noemen. Op een gegeven moment zei zij 'oneindig', waarop ik 'oneindig plus één' antwoordde. Daarna was het hek van de dam met 'oneindig plus oneindig', 'tien keer oneindig', 'oneindig keer oneindig', ... Ik weet niet meer wie er gewonnen heeft.
Het zal u wellicht verbazen, maar die oneindige getallen zijn echte wiskunde! Nog verbazingwekkender is wat je met die oneindige getallen kunt doen. Een mooi voorbeeld van zo'n toepassing betreft Goodstein-rijen. Die rijen zijn interessant vanwege de beroemde eerste onvolledigheidsstelling van Gödel, die zegt dat er in de wiskunde 'onbewijsbare waarheden' bestaan. Later meer hierover, maar nu eerst Goodstein.

Goodstein-rijen

Een Goodstein-rij start met een natuurlijk getal, zeg 100. Dit startgetal noem ik g_2. Ik schrijf dit getal nu binair, dus $100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$. Vervolgens schrijf ik ook de exponenten binair, dus
$g_2 = 2^{2^{2}+2} + 2^{2^{2}+1} + 2^2$.
Om de volgende term g_3 van de rij te vinden, vervangen we iedere 2 door een 3 en van het resultaat trekken we 1 af. We vinden dan
$g_3 = 3^{3^{3}+3} + 3^{3^{3}+1} + 3^3 - 1$.
Dit getal is ongeveer gelijk aan 3^{30}, dus grofweg 10^{15}. Maple geeft $g_3 = 228.767.924.549.636$. We schrijven g_3 weer in de basis 3, dus $g_3 = 3^{3^{3}+3} + 3^{3^{3}+1} + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2$. (We hebben $3^3 - 1$ dus herschreven als $2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2$ omdat het 3-tallig stelsel wel de cijfers 0, 1 en 2 heeft, maar niet -1.) De volgende term g_4 krijg je door iedere 3 in g_3 te vervangen door een 4 en vervolgens 1 af te trekken:
$g_4 = 4^{4^{4}+4} + 4^{4^{4}+1} + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 2 - 1$.
De cijfers 1 en 2 zijn niet veranderd. Dit getal heeft maar liefst 157 cijfers! Dit getal is dus groter dan 10^{100}, de 'bovengrens' van onze rekenmachines. Ter vergelijking: het aantal protonen in ons melkwegstelsel is kleiner dan 10^{70}. Desondanks gaan we vrolijk verder met g_5, g_6, ... De eerste term van g_5 is 5^n met $n = 5^5 + 5 = 3130$, dus $g_5 \approx 5^{3130} \approx 10^{2188}$, dus g_5 heeft ruim 2000 cijfers. Het getal g_6 heeft ruim 36.000 cijfers, g_{10} heeft er ruim 10 miljard en g_{60} heeft er meer dan 10^{100}.
We zien dat het vervangen van het grondtal 2 door 3, 3 door 4, 4 door 5, enzovoorts, ervoor zorgt dat de rij g_2, g_3, g_4, ... enorm snel stijgt. Weliswaar wordt in iedere stap ook 1 afgetrokken, maar dat zet maar een heel klein zoodje aan de dijk. Desondanks heeft Goodstein bewezen dat de rij g_2, g_3, g_4, ... vanaf een zekere g_n weer gaat dalen! Sterker nog, $g_n = 0$ vanaf een zekere indexwaarde. We zeggen dat de Goodstein-rij 'afbreekt'. De '-1' wint het dus op den duur! David wint van Goliath. Nog sterker, Goodstein bewees dat dit gebeurt voor *ieder* startgetal g_2. David wint dus *altijd* van Goliath.
Laten we eens kijken naar het startgetal $g_2 = 3$. In basis 2 uitgeschreven geldt $g_3 = 2 + 1$. We vervangen het grondtal 2 door 3 en trekken er 1 af: $g_3 = 3 + 1 - 1 = 3$. We vervangen het grondtal 3 door 4 en trekken 1 af: $g_4 = 4 - 1 = 3$. In de volgende stap zou het grondtal 4 vervangen worden door 5, maar er komt geen 4 voor in g_4. De cijfers 0, 1, 2 en 3 laten we gewoon staan, dus $g_5 = 3 - 1 = 2$. De daling wordt voortgezet met $g_6 = 2 - 1 = 1$ en $g_7 = 1 - 1 = 0$. De rij breekt dus af bij g_7.
Bemoedigd door dit succes proberen we startgetal $g_2 = 4$. In basis 2 uitgeschreven geldt $g_2 = 2^2$ en dus $g_3 = 3^3 - 1 = 26$. Dit schrijven we weer in de basis 3, dus $g_3 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2$. We vervangen 2 door 3 en trekken 1 af: $g_4 = 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 2 - 1 = 41$. Enzovoorts. U kunt g_5, g_6, ... uitrekenen, maar het zou gemeen zijn u te vragen wat de kleinste *n* is met $g_n = 0$. Dat is namelijk een getal met ruim 120 miljoen cijfers! Om een indruk te krijgen van dit getal stellen we ons voor dat de snelste supercomputer die we nu hebben sinds de oerknal heeft staan rekenen. Veertien miljard jaar lang zijn iedere seconde 10^{18} getallen in de Goodstein-rij met startgetal $g_2 = 4$ uitgerekend. Onze supercomputer is dan aangekomen bij grofweg de 10^{36}-e term. De berekening is dus nog lang niet af: we hebben pas 0,000 ··· 0001% gehad, waarbij op de puntjes ongeveer 120 miljoen nullen staan...

Bewijs van de stelling van Goodstein

In principe kun je bewijzen dat de Goodstein-rij met startgetal $g_2 = 4$ eindigt door 'gewoon' de hele rij op te schrijven. Je bent onmogelijk lang bezig en er is niet genoeg inkt in het universum om de hele rij op te schrijven, maar 'in principe' is dat mogelijk. Hetzelfde geldt voor startgetal $g_2 = 100$. Het is een krankzinnig groot, maar toch eindig probleem in de wiskundige zin van het woord.
Maar hoe bewees Goodstein dat zijn rij naar 0 gaat voor

ieder startgetal? Hij deed dat door gebruik te maken van oneindige getallen. Net als in het spelletje met mijn nichtje tellen we na oneindig gewoon door. Verstand op nul, blik op oneindig. We schrijven ω voor het kleinste oneindige getal. Daarna komen $\omega + 1$, $\omega + 2$, ..., 2ω, $2\omega + 1$, $2\omega + 2$, ..., 3ω, ..., ω^2, ..., ω^3, ..., ω^ω, ..., ω^{ω^ω}, ...
Maar mag dat wel? Bestaan al die oneindige getallen wel? Het antwoord is 'ja'. Je kunt die oneindige getallen construeren uit de natuurlijke getallen 0, 1, 2, ..., net zoals we rationale getallen kunnen construeren uit natuurlijke getallen, reële uit rationale getallen en complexe uit reële getallen. Een complex getal kun je bijvoorbeeld definiëren als een paar reële getallen. In de praktijk heb je die constructie vrijwel nooit nodig en werk je alleen met *eigenschappen* van complexe getallen, zoals $z \cdot w = w \cdot z$. Als je simpelweg accepteert dat i met $i^2 = -1$ bestaat in een nieuwe, uitgebreide getallenwereld en als je de rekenregels accepteert, dan heb je de definitie van complexe getallen als reële getallenparen niet meer nodig. Voor beginners is dat aan te raden. Je moet weliswaar even slikken bij zo'n gek nieuw getal i, maar zodra je die psychologische horde hebt genomen, kun je snel aan de slag met de nieuwe getallen. Als je echter niet bereid bent het bestaan van de nieuwe getallen en hun eigenschappen zomaar aan te nemen, dan moet je terug naar de definities om die eigenschappen te checken. Omdat de nieuwe (complexe) getallen zijn gedefinieerd in termen van de oude (reële) getallen, komen alle uitspraken over die gekke nieuwe getallen uiteindelijk neer op uitspraken over de oude vertrouwde getallen.
Zo ook met de oneindige getallen. De details van de constructie doen er nauwelijks toe. Van belang is vooral dat we een geordende rij 0, 1, 2, ..., ω, $\omega + 1$, ..., 2ω, ..., ω^2, ..., ω^ω, ..., ω^{ω^ω}, ... krijgen, dat al die getallen verschillend zijn, dus bijvoorbeeld $\omega + 1 > \omega$, dat we die getallen kunnen optellen en vermenigvuldigen en dat ook de machten netjes gedefinieerd zijn. Een belangrijke observatie is dat sommige getallen, zoals ω, 2ω, ω^2 en ω^ω, geen directe voorganger hebben. Een getal '$\omega - 1$' bestaat dus niet. U kunt mij op mijn woord geloven, maar u kunt ook de definitie van 'ordinaalgetal' opzoeken op Wikipedia en al mijn beweringen zelf checken. Mijn advies in dezen: *Kontrolle ist gut, Vertrauen ist besser*.
Terug naar Goodsteins bewijs dat voor *ieder* startgetal g_2 de Goodstein-rij afbreekt. Zijn idee was om het grondtal n in g_n te vervangen door ω. De cijfers 0, 1, ..., $n - 1$ blijven ongewijzigd. We krijgen dan een nieuwe rij G_2, G_3, G_4, ...
Bijvoorbeeld wordt de Goodstein-rij met startgetal
$g_2 = 100$
$g_2 = 2^{2^2+2} + 2^{2^2+1} + 2^2$, $g_3 = 3^{3^3+3} + 3^{3^3+1} + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2$
, ...
vervangen door
$G_2 = \omega^{\omega^\omega+\omega} + \omega^{\omega^\omega+1} + \omega^\omega$,
$G_3 = \omega^{\omega^\omega+\omega} + \omega^{\omega^\omega+1} + 2 \cdot \omega^2 + 2 \cdot \omega + 2$, ...
De eerste twee termen zijn gelijk en de term ω^ω in G_2 correspondeert met de term $2\omega^2 + 2\omega + 1$ in G_3. We zien dus dat $G_2 > G_3$. Goodstein heeft bewezen dat dit zo doorgaat: de G_n vormen een strikt dalende rij (zolang ze groter dan 0 zijn). U kunt dit zelf eenvoudig checken voor de eerste paar termen. Goodstein wist dat zo'n dalende rij eindig is. Maar uiteraard geldt $g_n \leq G_n$, want we hebben n vervangen door ω. Dus ook de rij g_n kan maar eindig veel positieve termen hebben, q.e.d.
Cruciaal in dit bewijs was de bewering dat de dalende rij G_n in eindig veel stappen bij 0 aankomt. Intuïtief is dit vrij duidelijk. Stel bijvoorbeeld dat we in de rij G_n bij $\omega + 3$ zijn aanbeland. Drie termen later hebben we dan hoogstens ω. En de volgende stap? Dat is een eindig natuurlijk getal, want ω is het kleinste oneindige getal. ($\omega - 1$ bestaat niet!). We hebben weliswaar geen enkele controle over de grootte van deze term, dit kan een krankzinnig groot getal zijn, maar het is wel kleiner dan ω en dus eindig. En daarna zijn we natuurlijk in eindig veel stappen bij 0. Zo kunnen we verder redeneren. Stel we zijn bij ω^2 aangekomen. In de volgende stap hebben we dan $a\omega + b$ met a en b eindige natuurlijke getallen, zeg $2\omega + 17$. Zeventien stappen later hebben we hoogstens $\omega + b$ met een eindige b, zeg $\omega + 1000$. Duizend stappen later hebben we hoogstens ω en daarna zijn we in eindig veel stappen bij 0. Enzovoorts.

Gödel, Kirby, Paris en Goodstein

We hebben gezien hoe je met behulp van oneindige getallen de stelling van Goodstein kunt bewijzen, die zegt dat iedere Goodstein-rij in eindig veel stappen afbreekt, hoe groot de (eindige) beginterm g_2 ook is. Met die oneindige getallen kregen we weliswaar een inzichtelijk bewijs, maar toch vragen we ons natuurlijk af of die oneindige getallen nou echt nodig waren om een stelling te bewijzen over doodgewone, eindige, natuurlijke getallen. Het antwoord is nogal verrassend. Iets te kort door de bocht: ja, je hebt die oneindige getallen nodig om Goodsteins stelling over eindige getallen te bewijzen! Preciezer: Kirby en Paris (1982) hebben bewezen dat Goodsteins stelling niet te bewijzen is binnen de 'standaard-rekenkunde'. (Voor de kenners: eerste orde Peano-rekenkunde. We nemen aan dat deze theorie consistent is.) Met geestverruimende oneindige getallen konden we Goodstein wel bewijzen. We zien dus dat Goodsteins stelling een onbeslisbare bewering is binnen de standaard-rekenkunde: niet te bewijzen en niet te weerleggen. Blijkbaar is onze redenering dat de dalende rij G_n afbreekt niet te vertalen naar standaard-rekenkunde! (De boosdoener is het woord 'enzovoorts' aan het eind van die redenering.)
Een beroemde stelling van Gödel uit 1931 had al laten zien dat onbeslisbare beweringen bestaan. Dankzij Kirby en Paris weten we dat Goodsteins stelling een concreet voorbeeld is van zo'n onbeslisbare bewering over natuurlijke getallen. We zien hoe subtiel de 'stellingen over stellingen' van Gödel, Kirby en Paris zijn. We kunnen binnen de standaard-rekenkunde de stelling van

Goodstein formuleren en we kunnen binnen die theorie voor ieder startgetal die stelling verifiëren door de rij 'gewoon' uit te schrijven. En toch kunnen we binnen diezelfde theorie Goodsteins bewering '*voor ieder startgetal breekt de Goodstein-rij af*' niet bewijzen! *The mind boggles.*
Tot slot enkele literatuurtips. Het originele artikeltje van Kirby en Paris bevat een leuke variant op Goodstein in de vorm van een strijd tussen Hercules en een veelkoppige Hydra. Smullyan biedt u de mogelijkheid zelf Gödel te bewijzen door u door al zijn puzzels heen te werken. Het geweldige boek van Smith is zeer toegankelijk. Learys boek is wat technischer, maar maakt zijn titel helemaal waar.

Literatuur

– Kirby, L. & Paris, J. (1982). Accessible independence results for Peano arithmetic. Bulletin of the London Mathematical Society, 14, 285-293.
– Leary, C.C. (2000). A Friendly Introduction to Mathematical Logic. New Jersey: Prentice Hall.
– Smith, P. (2013). An Introduction to Gödel's Theorems. Cambridge: Cambridge University Press.
– Smullyan, R. (2000). Forever Undecided: A Puzzle Guide to Gödel. Oxford: Oxford Paperbacks.

Over de auteur

Jeroen Spandaw is lerarenopleider en universitair docent wiskunde aan de TU Delft.
E-mailadres: *j.g.spandaw@tudelft.nl*

MEDEDELING

UITSLAG NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE 2016 EN INSCHRIJVING 2017

Op vrijdag 11 november werden op de Technische Universiteit Eindhoven de winnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2016 bekendgemaakt. De vijf leerlingen (in elk van de drie categorieën) die over drie rondes de beste prestatie hebben neergezet, ontvingen geldprijzen van 50 tot 250 euro, mogelijk gemaakt door de NVvW.
De prijswinnaars en natuurlijk ook hun wiskundedocenten mogen erg trots zijn op deze fantastische resultaten.

Prijswinnaars klas 4 en lager (allemaal uit 4 vwo)		**finale**	**2e r**	**1e r**
1 Levi van de Pol	Ichthus College Veenendaal	50	40	36
2 Matthijs van der Poel	Christelijk Gymnasium Utrecht	50	34	34
3 Szabi Buzogany	Meerwegen College Amersfoort	38	17	36
4 Jonathan Zandee	Wartburg College Rotterdam	31	23	31
5 Tim Vogels	Pantarijn Wageningen	25	31	36

Prijswinnaars klas 5		**finale**	**2e r**	**1e r**
1 Thomas Chen	Gymnasium Haganum Den Haag	50	19	36
2 Christel van Diepen	Stedelijk Gymnasium Nijmegen	44	24	31
3 Samuel Tiersma	Gymnasium Felisenum Velsen-Zuid	43	25	31
4 Nils van de Berg	Sint Oelbert Gymnasium Oosterhout	36	30	36
5 David Svejda	Christelijk Gymnasium Utrecht	33	30	36

Prijswinnaars klas 6		**finale**	**2e r**	**1e r**
1 Wietze Koops	RSG Stad & Esch Lyceum Meppel	50	37	31
2 Gabriel Visser	Stedelijk Gymnasium Schiedam	49	38	34
3 Erik van Cappellen	Johannes Fontanus College Barneveld	49	20	36
4 Ludo Dekker	Johan de Witt Gymnasium Dordrecht	47	33	31
5 Primo Ish-Hurwitz	OSG Sevenwolden Heerenveen	47	28	31

Een nieuwe jaargang van de Wiskunde Olympiade start in januari. Elke school kan zelf een geschikte dag en tijd kiezen in de periode van 23 januari t/m 2 februari 2017. Aanmelden kan tot 12 januari 2017. Zie www.wiskundeolympiade.nl voor meer informatie. Wie weet behoort volgend jaar wel één van uw leerlingen tot de prijswinnaars!

NIEUWE VAKSPECIFIEKE REGEL OVER AFRONDEN VOOR WISKUNDE A, B EN C HAVO EN VWO

De afgelopen jaren heeft het CvTE herhaaldelijk signalen uit het veld ontvangen waaruit blijkt dat niet altijd duidelijk is hoe om te gaan met tussentijds afronden en het noteren van tussenantwoorden. Om deze onduidelijkheid zoveel mogelijk weg te nemen heeft het CvTE een nieuwe vakspecifieke regel over het tussentijds afronden opgesteld.

Nieuwe vakspecifieke regel (afrondregel)

a. *Als bij een vraag doorgerekend wordt met tussenantwoorden die afgerond zijn, en dit leidt tot een ander eindantwoord dan wanneer doorgerekend is met niet-afgeronde tussenantwoorden, wordt bij de betreffende vraag één scorepunt in mindering gebracht. Tussenantwoorden mogen wel afgerond genoteerd worden.*

b. *Uitzondering zijn die gevallen waarin door de context wordt bepaald dat tussenantwoorden moeten worden afgerond.*

c. *(alleen voor wiskunde A en C)*
De aftrek voor fouten zoals bedoeld onder a. en/of fouten bij het afronden van het eindantwoord bedraagt voor het hele examen maximaal 2 scorepunten.

De hieronder staande vakspecifieke regel over het afronden van groeifactoren en kansen, die in de septembermededelingen van 2015 is gepubliceerd voor de examens havo A en vwo A en C blijft gehandhaafd: *Als een groeifactor of kans wordt gevraagd, geldt voor het eindantwoord: groeifactoren moeten worden genoteerd in minstens twee decimalen en kansen moeten worden genoteerd in minstens twee decimalen of hele procenten. Meer decimalen zijn vereist als het nodig is om af te wijken van 0 of 1.*

Wiskunde A en C

In de syllabi voor de nieuwe programma's is aangegeven dat de kandidaat moet weten dat tussentijds afronden gevolgen kan hebben voor het eindantwoord en hij hiernaar dient te handelen.
Bij wiskunde A en C gaat het vooral om het kunnen gebruiken van wiskunde bij het oplossen van problemen in betekenisvolle contexten en minder om het bedrijven van wiskunde als zelfstandige discipline (zie cTWO-rapport *Denken en doen*). Het is niet de bedoeling dat leerlingen veelvuldig afgestraft worden voor het maken van afrondfouten. Om die reden is het aantal aftrekpunten voor het maken van afrondfouten bij wiskunde A en C gemaximeerd op 2 voor het volledige examen.

Wiskunde B

Het karakter van wiskunde B brengt met zich mee dat contexten minder voorkomen dan bij wiskunde A en C en eerder aanleiding zijn tot abstractie en de vorming van wiskundige concepten (zie cTWO-rapport *Denken en doen*). Daarom wordt het aantal aftrekpunten voor afrondfouten bij wiskunde B-examens niet gemaximeerd.

Werkwijze correctie

Omdat bij wiskunde A en C maximaal twee afrondfouten in rekening gebracht mogen worden, noteren eerste en tweede corrector per examenwerk bij welke vragen een scorepunt in mindering is gebracht op basis van de nieuwe afrondregel. De eerste corrector noteert bij elke afrondfout in het werk van de kandidaat voor de kantlijn een A. De tweede corrector gaat na of hij zich kan vinden in dit aspect van de beoordeling door de eerste corrector. De deelscores per vraag worden zoals gebruikelijk in het programma Wolf ingevoerd. Bij de laatste scorecomponent van Wolf voert de docent een compensatiescore in, namelijk het aantal afrondfouten hoger dan twee. Wolf telt deze compensatiescore automatisch op bij de totaalscore. Er mogen immers maximaal twee afrondfouten in rekening worden gebracht.

Voorbeeld:
Stel een kandidaat heeft op de vragen een score van 50 behaald. Bij vijf vragen is i.v.m. met de nieuwe afrondregel 1 scorepunt in mindering gebracht. Van de 5 in mindering gebrachte scorepunten mogen er slechts 2 verrekend worden. Er moet dus bij dit voorbeeld door de corrector een compensatiescore van 5 - 2 = 3 worden ingevoerd als laatste component. De volgens afrondregel c. gecorrigeerde totaalscore wordt dus 50 + (de compensatiescore) 3 = 53.

Voorbeelden van leerlinguitwerkingen

In deze toelichting wordt door middel van enkele leerlinguitwerkingen aangegeven, waar en hoe de nieuwe regels toegepast moeten worden.

Voorbeeld 1
Het aantal inwoners van de gemeente A is in de periode 2010 tot 2016 exponentieel gestegen.
Op 1 januari 2010 was het aantal inwoners 265 431 en op 1 januari 2016 was dit 310 247.
Men gaat ervan uit dat deze exponentiële groei zich ook in de jaren hierna zo zal voortzetten. Bereken in welk jaar het aantal inwoners voor het eerst groter zal zijn dan 400 000.

Uitwerking leerling 1
De groeifactor per jaar is $\left(\frac{310247}{265431}\right)^{\frac{1}{6}} = 1{,}026343315$
De vergelijking $310\,247 \cdot 1{,}026343315^{t} = 400\,000$ moet worden opgelost.
Met GR: *(leerling geeft aan hoe GR wordt ingezet)*
Dit geeft $t \approx 9{,}8$
Het antwoord: in 2025
Alle scorepunten worden toegekend.
Afrondfouten als gevolg van het beperkt aantal cijfers waarmee de GR rekent, leiden uiteraard niet tot aftrek van scorepunten.

Uitwerking leerling 2
De groeifactor per jaar is $\left(\frac{310247}{265431}\right)^{\frac{1}{6}} = 1{,}03$
De vergelijking $310\,247 \cdot 1{,}03^{t} = 400\,000$ moet worden opgelost.
Met GR: *(leerling geeft aan hoe GR wordt ingezet)*
Dit geeft $t = 8{,}6$
Het antwoord: in 2024
Op grond van afrondregel a. wordt 1 scorepunt afgetrokken voor het tussentijds afronden met een verkeerd eindantwoord tot gevolg.

Uitwerking leerling 3
De groeifactor per jaar is $\left(\frac{310247}{265431}\right)^{\frac{1}{6}} = 1{,}03$
De vergelijking $310\,247 \cdot 1{,}03^{t} = 400\,000$ moet worden opgelost.
Met GR: *(leerling geeft aan hoe GR wordt ingezet)*
Dit geeft $t \approx 9{,}8$
Het antwoord: in 2025
Aan de uitwerking is te zien dat doorgerekend is met de niet-afgeronde waarde. Alle scorepunten worden toegekend. Tussenantwoorden mogen immers afgerond genoteerd worden.

Voorbeeld 2
In een grote supermarktketen worden literflessen frisdrank van het merk Spliss verkocht.
In 2013 was de verkoopprijs van deze flessen € 0,80, in 2014 was deze € 0,90.
In 2013 was de omzet van deze frisdrank € 283 580, in 2014 was deze € 346 248.
Hoeveel flessen Spliss werden er in 2014 meer verkocht dan in 2013? Rond je eindantwoord af op duizendtallen.

Uitwerking leerling 1
Het aantal verkochte flessen in 2013 was

$$\frac{283580}{0{,}80} = 354475$$

Het aantal verkochte flessen in 2014 was

$$\frac{346248}{0{,}90} = 384720$$

Het verschil is 30 245, dus 30 000
Alle scorepunten worden toegekend.

Uitwerking leerling 2
Het aantal verkochte flessen in 2013 was

$$\frac{283580}{0{,}80} = 354000$$

Het aantal verkochte flessen in 2014 was

$$\frac{346248}{0{,}90} = 385000$$

Het verschil is 31 000
Er is twee keer ten onrechte tussendoor afgerond, met een ander eindantwoord tot gevolg. Er wordt bij deze vraag 1 scorepunt afgetrokken voor het tussentijds afronden op grond van afrondregel a.

Uitwerking leerling 3
Het aantal verkochte flessen in 2013 was

$$\frac{283580}{0{,}80} = 354475$$

Het aantal verkochte flessen in 2014 was

$$\frac{346248}{0{,}90} = 384720$$

Het verschil is 30 245
Het eindantwoord is ten onrechte niet afgerond op duizendtallen. Er wordt 1 scorepunt afgetrokken, omdat niet is afgerond (zie afrondregel c).

Voorbeeld 3
Het lichaamsgewicht van iemand met obesitas is de afgelopen jaren, dankzij een streng dieet, gedaald van 133,20 kilogram op 1 juli 2011 naar 87,20 kilogram op 1 juli 2016. We gaan uit van een wiskundig model waarbij de gewichtsafname lineair verloopt. Neem aan dat deze daling zich nog enige tijd zo voortzet.
Bereken zijn gewicht in kilogram op 1 april 2017. Rond je eindantwoord af op één decimaal. Je hoeft geen rekening te houden met de verschillende lengtes van de maanden.

Uitwerking leerling 1
De gemiddelde afname per maand is
$(133{,}20 - 87{,}20) / 60 = 0{,}76$.

Gewicht op 1 april 2017 is 87,20 – 9 · 0,76 = 80,3.
De gemiddelde afname van het gewicht per maand lijkt foutief afgerond (GR geeft bijvoorbeeld 0,7666666667). Uit de verdere uitwerking blijkt echter dat doorgerekend is met de niet-afgeronde waarde en het tussenantwoord afgekapt is opgeschreven. Hier is dus sprake van een notatiefout. In het artikel 'Gelijke monniken, gelijke kappen' (Euclides, *december 2014) staat dat fouten in wiskundige notaties de A/C-leerlingen niet altijd aangerekend moeten worden en notatiefouten in aanloop naar in essentie juiste antwoorden kunnen worden geaccepteerd. In datzelfde artikel is te lezen dat bij wiskunde B notatiefouten (verschrijvingen) wel aangerekend dienen te worden. Omdat uit de verdere uitwerking blijkt dat juist is doorgerekend, is de schrijfwijze bij wiskunde B echter passabel. Zowel bij wiskunde A/C als bij wiskunde B vindt dus geen aftrek van scorepunten plaats.*

Uitwerking leerling 2
De gemiddelde afname per maand is
(133,20 – 87,20) / 60 = 0,76.
Gewicht op 1 april 2017 is 87,20 – 9 · 0,76 = 80,4.
Uit de uitwerking blijkt dat de kandidaat in de tussenstap foutief heeft afgerond. Er wordt 1 scorepunt afgetrokken voor het foutief afronden.

Uitwerking leerling 3
De gemiddelde afname per maand is

$$\frac{133{,}20-87{,}20}{60}=0{,}7\ldots$$

Het gewicht op 1 april 2017 is 87,20 – 9 · 0,7... = 80,3.
Alle punten worden toegekend. Door het gebruik van puntjes bij het tussenantwoord geeft de leerling aan het tussenantwoord niet volledig opgeschreven te hebben. Uit de verdere uitwerking blijkt echter dat wel doorgerekend is met de niet-afgekapte of niet-afgeronde waarde.

Voorbeeld 4
a. De functie f is gegeven door $f(x) = 1{,}12^x$.
Bereken de kleinste waarde van x, waarvoor geldt: $f(x) \geq 4$.
Geef je eindantwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Uitwerking leerling
Met GR: *(leerling geeft aan hoe GR wordt ingezet om $f(x) = 4$ op te lossen)*
$x = 12{,}23251075$
Het antwoord: 12,23
Het eindantwoord is ten onrechte naar beneden afgerond. Er wordt 1 scorepunt afgetrokken omdat onjuist is afgerond. Een vergelijkbare situatie wordt beschreven in 'Gelijke monniken, gelijke kappen' onder het kopje 'Afronden', voorbeeld 2.

b. Bereken de toename van f op het interval [15, 20] in één decimaal nauwkeurig.

Uitwerking leerling 1
$f(20) = 1{,}12^{20} = 9{,}6....$
$f(15) = 1{,}12^{15} = 5{,}4....$
Toename is $f(20) - f(15) = 4{,}2$.
Alle punten worden toegekend. Door het gebruik van de puntjes bij het tussenantwoord geeft de leerling aan het tussenantwoord niet volledig opgeschreven te hebben. In de verdere uitwerking is niet te zien of er doorgerekend is met de afgekapte of met de niet-afgekapte waarden. De leerling krijgt het voordeel van de twijfel.

Uitwerking leerling 2
$f(20) = 1{,}12^{20} = 9{,}7$
$f(15) = 1{,}12^{15} = 5{,}5$
Toename is $f(20) - f(15) = 4{,}2$
Aan de tussenantwoorden is te zien dat er onjuist afgerond is. Er wordt 1 scorepunt afgetrokken.

Het CvTE realiseert zich dat met de nieuwe afrondregel en de gegeven voorbeelden niet op voorhand alle beoordelingsproblemen zijn opgelost. Overleg tussen eerste en tweede corrector blijft altijd nodig.
Ervaringen opgedaan bij de examens van 2017 zullen meegenomen worden bij het vaststellen van de vorm en inhoud van de correctievoorschriften vanaf 2018.
Het CvTE dankt de pilotdocenten, de toetsdeskundigen van Cito en de leden van de vaststellingscommissies voor hun opbouwende en kritische opmerkingen bij de totstandkoming van deze toelichting.

Over de auteur
Dit artikel is tot stand gekomen onder auspiciën van het CvTE. Emailadres: *info@hetcvte.nl*

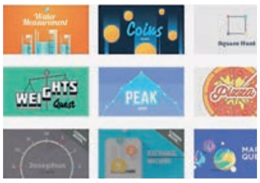
WISKUNDE DIGITAAL

POLYUP

Lonneke Boels

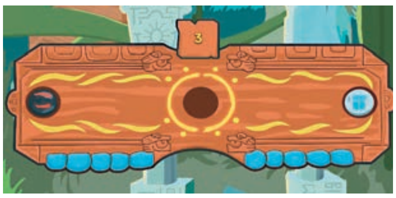
Deze keer een website met een heleboel spellen op het raakvlak van wiskunde en 'computational thinking'. Dat laatste betekent zoiets als logisch denken en redeneren of een wiskundige denkactiviteit.

Bij de spellen zit een aantal klassiekers, zoals: In hoeveel stukken kun je een pizza maximaal verdelen als je tien keer mag snijden? Maar ook het driedeurenprobleem zal er over enige tijd op komen te staan. De spellen zijn ontwikkeld door onderzoekers die hierover vertelden tijdens het internationale congres over onderzoek naar wiskundeonderwijs ICME-13.
De website *Polyup* bevat een flink aantal spellen waarvan er inmiddels zeven klaar zijn en nog 47 in ontwikkeling zijn. Het eerste spel dat ik zelf speelde heet *Marble Quest* en gaat over het verplaatsen van knikkers. Als je met de muis over het plaatje van het spel gaat, verschijnt een tekst die vertelt dat dit over decomposition en het concept algoritme gaat.



figuur 1 Overzicht van spellen bij het onderdeel algoritmisch denken

Het doel van het spel *Marble Quest* is om de knikker of knikkers die links staan, naar rechts te brengen en omgekeerd, zie figuur 2. Je kunt knikkers verplaatsen door over een andere knikker te springen of door naar een lege plaats te schuiven. Het doel is om dit steeds in zo min mogelijk zetten te doen. Bij twee knikkers is het minimum aantal zetten drie. Bij vier knikkers is dit... Ja dat is dus aan de leerlingen om te ontdekken. Wat is het patroon? Dit spel heeft meerdere niveaus.



figuur 2 *Marble Quest.* In drie zetten zijn de zwarte en witte knikker van plaats gewisseld

Ook bij het spel *Pizza snijden* is de vraag wat het patroon is. Met één snede krijg je twee stukken, met twee sneden krijg je er maximaal vier, met drie sneden maximaal zeven. Wat is het patroon? Hoe komt dat? Ook dit spel heeft meerdere niveaus. Bij het spel *Coins* is het doel om met één keer wegen uit te vinden welke schaal met munten vervalste munten bevat. We weten dat de vervalsingen 9 gram wegen en de echte munten 10 gram. We hebben vijf schalen en je mag maar één keer wegen. Kun je erachter komen welke schaal met munten de vervalsingen bevat? Dit spel heeft maar één opdracht. *Water measurement* is ook een klassieker: je hebt twee kruiken die je met water kunt vullen maar je wilt een hoeveelheid water hebben die te veel is voor de ene kruik en te weinig voor de andere. Kun je precies de hoeveelheid water afmeten die je wilt hebben? Dit spel kent meerdere opdrachten. De naam *Polyup* van de website komt van György Pólya die u waarschijnlijk wel kent van de heuristieken voor probleemoplossen en wiskundig denken. Het doel van de website is dan ook om het wiskundig denken, in het bijzonder het *computational thinking* te ontwikkelen bij leerlingen. Een goede Nederlandse vertaling voor deze term heb ik nog niet gevonden.

Pluspunten

- De spellen zijn gratis na registratie.
- Sommige spellen sluiten aan bij nieuwe onderwerpen uit de wiskunde, zoals *data science.*
- De software is volgens de makers *open source.*
- Het zijn echte spellen met echte uitdagingen.
- Tot nu toe is de site vrij van reclames.
- Een aantal spellen kent meerdere opdrachten of niveaus.

Minpunten

- Het duurt soms lang voordat een programma de eerste keer start.
- Ik heb dit niet uitgetest in een klas dus ik weet niet of het werkt met dertig leerlingen tegelijk.
- De site onthoudt niet waar ik gebleven ben in een spel (wel dat ik een spel gedaan heb) dus dan begin je steeds opnieuw met de eerste opdracht.
- De taal is Engels en soms zijn de woorden pittig (*counterfeit* (vervalsing), bijvoorbeeld).
- Sommige spellen zijn erg kort (zoals *Coins*). Zodra je het probleem hebt opgelost, ben je klaar, er is dan geen verdieping meer.
- De spellen die het nu al doen, zijn leuk om te spelen maar sluiten niet direct aan bij een concrete wiskundeles. De spellen die dat waarschijnlijk wel doen, zijn nog niet beschikbaar.

Geschikt voor: brugklas havo-vwo tot en met 5 havo en 6 vwo, sommige leerlingen van 3e of 4e klas mavo.
Eindoordeel: 'aanschaffen'
Kosten: gratis
Getest op: laptop met Google Chrome 53.0.2785.143 m (64-bit)
Makers: wiskundigen uit Iran en VS. De website heeft een contactadres in California.
Te vinden via: http://www.polyup.com/

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen. E-mailadres: *L.Boels@chrlyceumdelft.nl*

WERELDWISKUNDE FONDS IN KENIA

Betty Straatman

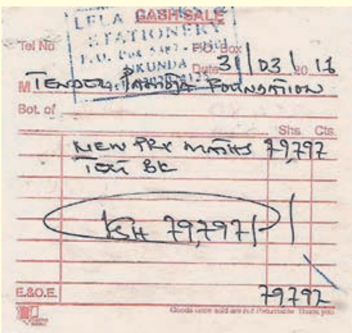
Het Wereldwiskunde Fonds bestaat al bijna een kwart eeuw. We willen in iedere *Euclides* een initiatief van het WwF onder de aandacht brengen. Deze keer: Betty Straatman helpt namens het WwF een school in Lunga Lunga, Kenia.

Eind vorig jaar heb ik een aanvraag gedaan voor wiskundeboeken voor de klassen 6, 7 en 8 van de Mahuruni Primary School in Lunga Lunga, een stad in het district Kwale, vlakbij de grens met Tanzania.



figuur 1 Het WWF-aanvraagformulier heb ik samen met de wiskundeleraar ingevuld

Het onderwijs in Kenia is ingericht volgens het Engelse systeem en het niveau van de wiskunde is op het niveau van onze vroegere mavo. Met een klein stapeltje boeken per klas, één per vier à vijf leerlingen, zag ik de docent een volle klas ingaan. De docent zag het graag anders, vandaar mijn aanvraag namens hem. Eind september 2016 heb ik de school weer bezocht. Er was die dag geen les, maar een aantal leerlingen en de docent vertelden me dat de resultaten omhoog zijn geschoten en dat werd door de *District Education Officer* (DEO) bevestigd. Hij houdt de resultaten van de scholen in zijn district heel goed bij.
In Kenia is er op de scholen in een regio een gezonde competitie. Drie keer per jaar worden er centrale toetsen gemaakt.



figuur 2 Rekening van 115 wiskundeboeken. De gemiddelde prijs van een boek is nog geen 7 euro.

Begin november zijn er examens en het wiskundecijfer bepaalt voor de leerling mede het niveau van de vervolgopleiding. In Nederland kiezen de ouders in overleg met de leerkracht van groep 8 waar een leerling het best op zijn plaats is voor een vervolgopleiding. In Kenia bepaalt de overheid dat. Soms worden leerlingen ver van huis geplaatst. De meeste middelbare scholen zijn *boarding schools* (kostscholen) en de kosten van het vervolgonderwijs hangen af van de totale scores op de belangrijkste vakken.



figuur 3 Leerlingen aan het werk

De seniorleraar, tevens wiskundeleraar, was lovend over het cadeau dat zijn school van het WwF heeft ontvangen. Ook de leerlingen waren heel blij. Omdat er op de dag dat ik de school bezocht een bibliotheekproject startte, waren de lessen naar de middag verplaatst. Deze school is een van de eerste in de regio die in de groepen 1 t/m 8 een bibliotheekkast in ieder klaslokaal kreeg. De wiskundevaardigheid is al verbeterd, maar een goed leesvaardigheid kan daar nog meer aan bijdragen. De DEO hoopt dat we op den duur ook nog andere scholen kunnen helpen. De leerkrachten en leerlingen willen vooruit, maar de regering helpt alleen in zeer zichtbare gebieden en komt niet in de buitengebieden.
Namens het schoolteam, de leerlingen en de leraren wil ik iedereen bedanken die het WwF ondersteunt.

Over de auteur

Betty Straatman-de Witte was tot aan haar pensioen docent wiskunde op het Adelbert College te Wassenaar en is lid van de werkgroep Wereldwiskunde Fonds.

MET DE LEERLINGEN NAAR 'IMAGINARY'

Sandra Wielders

Zoals u in de vorige *Euclides* uitgebreid heeft kunnen lezen, toert de reizende tentoonstelling 'Imaginary' door het land. Sandra Wielders ging er met haar leerlingen naar toe.

Wiskunde en 3D-prints

Op 27 augustus zijn we met een groep leerlingen van de vwo bovenbouw van de Trevianum Scholengroep in Sittard naar de tentoonstelling 'Imaginary' op de TUe gegaan. Een tentoonstelling waarbij de leerlingen wiskunde eens vanuit een ander perspectief kunnen bekijken. Ze hebben gezien hoe wiskunde een rol speelt bij 3D-prints. Na het bekijken van enkele voorbeelden zijn de leerlingen zelf aan de hand van opdrachten aan het werk gegaan met het computerprogramma *Surfer*. Door formules aan te passen konden ze meteen de veranderingen in de 3D-afbeelding zien. De leerlingen zijn hier actief mee aan het werk geweest en hebben meer inzicht gekregen in het werken met driedimensionale formules, ze waren hier erg enthousiast over. Thuis kunnen ze verder puzzelen om een mooi ontwerp te maken voor de prijsvraag die bij 'Imaginary' is uitgeschreven.



figuur 1 foto: Sandra Wielders

Oneindig patroon

Naast het werken met driedimensionale formules hebben de leerlingen enkele bekende vlakvullingen bekeken en hun achtergrond bestudeerd. Ze kregen de kans om aan het werk te gaan met verschillende puzzelstukken. De opdracht was om een oneindig patroon te ontwerpen. Ze werden uitgedaagd en werkten samen om tot een goede oplossing te komen. Op deze manier zagen de leerlingen een vorm van wiskunde die voorkomt in de alledaagse omgeving, deze wiskunde is erg herkenbaar.



figuur 2 foto: Sandra Wielders

De tentoonstelling is voor de leerlingen ook een kennismaking met de TUe. Terwijl op de TUe alles z'n gangetje ging, keken onze leerlingen goed rond. Ze kregen een indruk van de sfeer op de universiteit, een plek waar ze in de toekomst mogelijk naartoe gaan. Voor sommigen van hen is dit iets waar ze duidelijk naar uitkijken. Ze zien een nieuwe uitdaging en hebben hier vandaag even van mogen proeven.
Als u in de gelegenheid bent met uw leerlingen naar 'Imaginary' te gaan, dan raad ik dat van harte aan!



figuur 3 foto: TU/e, Bart van Overbeeke

Over de auteur

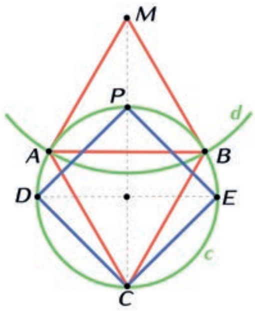
Sandra Wielders is docent wiskunde op de Trevianum Scholengroep te Sittard.
E-mailadres: *s.wielders@trevianum.nl*

PUZZEL 92-3

MEETKUNDE

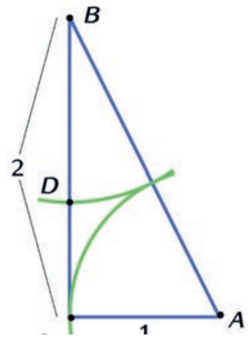
Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Deze keer hebben we een aantal meetkunde 'puzzels' voor u die u vermoedelijk niet zal tegenkomen in de schoolboeken. We gaan eerst op een wat onbekende manier een lijnstuk verdelen volgens de gulden snede. En dan bouwen we die figuur uit tot een bijzonder geval van een te bewijzen meetkundestelling in opgave 3. In principe zouden vwo-leerlingen met wiskunde B deze opgaven moeten kunnen oplossen. Alle hun bekende kennis over vlakke meetkunde, goniometrie, analytische meetkunde, vectormeetkunde en algebra mag worden gebruikt, hoewel niet alles nodig is. We tekenen twee gelijkzijdige driehoeken *ABC* en *ABM*. Verder de omgeschreven cirkel *c* van *ABC* en de cirkel *d* met middelpunt *M* door *A* en *B*. En we tekenen het vierkant *PDCE* op cirkel *c*. Zie figuur 1.



figuur 1

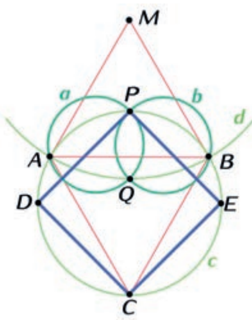
Het zal u bekend zijn dat de eenvoudigste manier om een lijnstuk te verdelen volgens de gulden snede is door een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 1 en 2 te tekenen en vervolgens een stuk van lengte 1 op de schuine zijde af te passen en vervolgens het resterende deel af te passen op de zijde van lengte 2. Zie figuur 2. De hoekpunten van zo'n driehoek zijn ook te vinden in figuur 1, maar er is ook een lijnstuk dat daar al volgens de gulden snede is verdeeld.



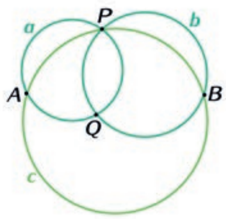
figuur 2

Opgave 1a - Welke drie punten vormen een driehoek zoals in figuur 2?
Opgave 1b - Welk lijnstuk in de figuur is al verdeeld volgens de gulden snede? Bewijs dat.

De volgende opgaven staan geheel los van opgave 1, hoewel we wel beginnen met dezelfde figuur.
Voor opgave 2 tekenen we ook nog het snijpunt *Q* van *MC* (niet getekend) en cirkel *d* en de cirkels *a* en *b* respectievelijk door *APQ* en *BPQ*. Zie figuur 3. Dan is er een aantal mooie eigenschappen te ontdekken.



figuur 3



figuur 4

Opgave 2a - Eerst vragen we u te bewijzen dat *B*, *Q* en *D* collineair zijn, dus op een lijn liggen.
Opgave 2b - Bewijs nu dat *DP* raaklijn is van cirkel *b* en dus ook *EP* raaklijn van *a*, met als gevolg dat *a* en *b* elkaar loodrecht snijden.
Opgave 2c - Onder welke hoek snijden cirkels *c* en *d* elkaar? Licht uw antwoord toe.
Opmerking: *Onder de hoek waaronder twee cirkels elkaar snijden verstaan we de hoek tussen de raaklijnen in een snijpunt van die cirkels. We kiezen daarvoor altijd de kleinste hoek, dus* $\leq 90°$.
Voor opgave 3 hebben we weer een cirkel *c* met daarop de nu willekeurig gekozen punten *A* en *B*. Punt *C* en cirkel *d* hebben we niet nodig. Punt *P* is nu een variabel punt op *c*. Verder is *Q* nu een willekeurig punt op, in of buiten cirkel *c*. Cirkels *a* en *b* zijn weer omgeschreven cirkels van respectievelijk driehoeken *APQ* en *BPQ*. Zie figuur 4.

Stelling 1
De hoek waaronder cirkels *a* en *b* elkaar snijden is onafhankelijk van de plaats van *P* op *c*.
We kiezen dus een punt *Q* en cirkel *c* met *A* en *B* vast. En een beweeglijk punt *P* op *c*.

Opgave 3a - Als *Q* op cirkel *c* ligt is de stelling eigenlijk triviaal. Leg dat uit.
Voor het bewijs van stelling 1 maakt het in principe niet veel uit of *Q* aan dezelfde kant van *AB* ligt als *P*, en of *Q* binnen of buiten *c* ligt. U mag dus zelf kiezen waar u *Q* tekent, wij hebben een voorbeeld gegeven in figuur 4.
Opgave 3b - Bewijs stelling 1.

Wellicht ziet u nu het verband met opgave 2c en had u met behulp van stelling 1 die vraag direct kunnen beantwoorden.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En u hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op maandag 16 januari binnen zijn.

vakbladeuclides.nl/923puzzel

LADDERSTAND

Top 10 van de ladderstand na puzzel 92-1 is:

H. Linders	203
H. Klein	194
L. Pos	184
A. Grünefeld	132
J. Guichelaar	122
F. van Hoeve	106
J. Remijn	99
G. Bouwhuis	95
K. van der Straaten	78
H. Bakker	71

We feliciteren Hans Linders van harte met de ladderprijs.

AANKONDIGING WINTERSYMPOSIUM KWG 2017

RAAKVLAKKEN TUSSEN WISKUNDE EN INFORMATICA

Zaterdag, 14 januari 2017, Academiegebouw van de Universiteit Utrecht (Domplein)
Tijd: 10.30 – 16.00 uur

Het wintersymposium 2017 van het Koninklijk Wiskundig Genootschap heeft als thema raakvlakken tussen wiskunde en informatica. In het symposium nemen vier wetenschappers u mee in verschillende facetten van dit interdisciplinaire onderwerp. Rondom dit thema vinden momenteel veel ontwikkelingen in de wetenschap plaats, en daarnaast is er vanuit curriculumontwikkeling ook steeds meer aandacht voor bijvoorbeeld programmeren.

Sprekers

- Wieb Bosma (Radboud Universiteit Nijmegen) geeft een voordracht met de pakkende titel 'Leer mijn computer algebra!' Dat doet hij op basis van zijn rijke ervaring met onderzoek naar - en implementatie van - computeralgebrasystemen.
- Ronald de Wolf (CWI en Universiteit van Amsterdam) neemt ons mee in de wereld van quantumcomputers. Daarbij ligt de nadruk op de wiskundige modellering van dergelijke systemen en op toepassingen in de informatica.
- Sebastiaan Terwijn (Radboud Universiteit Nijmegen) introduceert een belangrijk begrip uit de theoretische informatica, namelijk informatieafstand. Dit koppelt hij aan toepassingen in de biologie, muziektheorie, literatuurwetenschap en filosofie.
- Lisa Rougetet (Universiteit Lille) toont ons diverse machines die in het midden van de vorige eeuw zijn gemaakt om het spelletje 'nim' te spelen en gaat in op de algoritmes die in deze machines heel tastbaar worden gemaakt. Dit koppelt ze aan ervaringen die hiermee momenteel op Franse scholen worden opgedaan.

Het symposium is in de eerste plaats bestemd voor docenten wiskunde: van docenten in opleiding tot ervaren docenten. Ook voor leerlingen en collega's van andere vakgebieden kan het symposium interessant zijn. Alle belangstellenden zijn van harte welkom. Zegt het voort!

Inschrijving

Het volledige programma, inclusief uitgebreidere beschrijvingen van de lezingen, is te vinden op de website van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, www.wiskgenoot.nl. Op deze website vindt u ook het digitale inschrijfformulier. De kosten voor deelname aan het symposium bedragen voor KWG-leden € 30, voor niet-leden € 35 en voor leerlingen, studenten en standhouders € 15 (dit is een deel van de kosten voor de lunch). De bijdrage is inclusief lunch en consumpties gedurende de dag. Bij betaling na 29 december 2016 worden de deelnamekosten met € 5 verhoogd.
Nadere inlichtingen: Theo van den Bogaart, *theo.vandenbogaart@hu.nl*, telefoon: (06)23375306.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2017

23/1 t/m 2/2
LANDELIJK
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

do 26/1
UTRECHT
Vmbo / Onderbouwconferentie

vr/za 3/2 4/2
NOORDWIJKERHOUT
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie Freudenthal Instituut

6/2 t/m 24/2
UTRECHT
Tentoonstelling Imaginary

wo 8/2
LANDELIJK
OnderbouwWiskundeDag
Organisatie Freudenthal Instituut

6/3 t/m 24/3
LEIDEN
Tentoonstelling Imaginary

do 16/3
LANDELIJK
Op de scholen: W4Kangoeroe, WereldWijdeWiskundeWedstrijd voor basis- en middelbare scholieren
Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

22/5 t/m 9/6
GRONINGEN
Tentoonstelling Imaginary

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 92

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
4	31 januari 2017	21 december 2016
5	21 maart 2017	9 januari 2017
6	9 mei 2017	6 maart 2017
7	27 juni 2017	1 mei 2017

Noordhoff Uitgevers

Moderne Wiskunde vernieuwt!

12e editie onderbouw

✓ Eenvoudig differentieren met drie leerroutes.
✓ Alle opdrachten digitaal:
- adaptief;
- met tussenstappen;
- met inhoudelijke feedback.





Beschikbaar voor schooljaar 2017/2018:
1 vmbo-k(gt), 1 vmbo-gt(h), 1 havo/vwo,
1 vwo en 1 vwo English.

Vraag nu een beoordelings-exemplaar aan!

modernewiskunde.noordhoff.nl

MODERNE WISKUNDE

Innoveren in leren